

位相的膜理論における対称性とフラックス背景の双対性

著者	別所 泰輝
学位授与機関	Tohoku University
学位授与番号	11301甲第19570号
URL	http://hdl.handle.net/10097/00132981

博士論文

位相的膜理論における対称性とフラックス背景の双対性

Symmetry of Topological Membranes and
Duality of Flux Background

東北大学 大学院 理学研究科 物理学専攻
素粒子・宇宙理論研究室

別所 泰輝

令和2年

概 要

本研究では、超弦理論の背景時空に非幾何学的フラックスが存在する場合のコンパクト化を議論すべく、Courant algebroid を用いて非幾何学的フラックスの微分幾何学的構造を解析する。そのために、Poisson 多様体上の Courant algebroid の構造を、 QP 多様体上での超幾何学的構成方法を用いて再定式化する。その結果を用いて、非幾何学的フラックスが存在する場合の位相的膜理論とカレント代数を構成した。さらに、 H フラックス、 R フラックス間を変換する Courant algebroid の新しい双対性を提唱し、これらフラックス間の変換が次数付きシンプレクティック多様体上の正準変換と理解出来ることを示した [1].

目次

1	序章	1
1.1	研究の背景	1
1.2	本研究の内容	5
1.3	本論文の構成	7
2	弦理論の概略	9
2.1	弦の作用	9
2.2	弦の量子化	11
2.3	弦理論のスペクトラム	12
2.4	T 双対性	13
2.5	弦理論のシグマ模型	14
3	QP 多様体を用いた標準的 Courant algebroid の構成	16
3.1	Courant algebroids	16
3.2	標準的 Courant algebroid と H フラックスによるその変形	17
3.3	QP 多様体	18
3.3.1	次数付き多様体	18
3.3.2	P 多様体	19
3.3.3	QP 多様体	19
3.3.4	Q 構造の構成法	19
3.4	QP 多様体を用いた標準的 Courant algebroid の構成	21
4	QP 多様体を用いた Poisson Courant algebroid の構成	24
4.1	Poisson 構造	24
4.2	Poisson Courant algebroid	24
4.2.1	Poisson 多様体上の微分幾何	24
4.2.2	Poisson Courant algebroid	26
4.3	超幾何学的構成	27
5	H フラックスと R フラックスの双対性	32
5.1	フラックス双対性と正準変換	32

5.1.1	QP 多様体上での正準変換	32
5.1.2	フラックス双対性	33
5.2	Courant algebroid 間のコホモロジーの双対性	34
5.2.1	de Rham コホモロジーとの関係	35
5.2.2	Poisson コホモロジーとの関係	35
5.2.3	コホモロジー間の双対性	36
6	二重場理論から見た Poisson Courant algebroids	38
6.1	二重場理論	38
6.2	QP 多様体による Poisson 構造及び二重場理論	40
7	位相的膜理論の構成	43
7.1	AKSZ シグマ模型	43
7.1.1	転入写像 $\mu_{*}ev^{*}$	44
7.1.2	写像空間 $\text{Map}(\mathcal{X}, \mathcal{M})$ 上の次数付きシンプレクティック幾何学	45
7.1.3	シグマ模型の作用	47
7.2	境界のある膜に対する AKSZ シグマ模型	48
7.3	Poisson Courant algebroid に対する AKSZ シグマ模型	49
7.3.1	自明な境界を持つ AKSZ シグマ模型	49
7.3.2	正準関数により非自明な境界を持つ AKSZ シグマ模型	51
7.3.3	境界上に現れる位相的弦理論	53
7.4	AKSZ シグマ模型間の双対性	55
8	ハミルトン形式による解析	57
8.1	ハミルトン形式への拡張	57
8.1.1	導来括弧から導かれる境界上の Poisson 括弧	57
8.1.2	導来括弧による Poisson 括弧の導出	60
8.2	ハミルトン形式とカレント代数	64
8.3	ハミルトン形式における R フラックス	66
8.3.1	Poisson Courant algebroid の上の導来括弧による Poisson 括弧の導出	66
8.4	R フラックスの存在する反変的カレント代数	68
9	結果と議論	70

A	Schouten 括弧	74
B	次数付き多様体とその上の演算規則	75
B.1	次数付き多様体 \mathcal{M}	75
B.2	基本となる演算規則	75
B.3	カルタン関係式	76
B.4	次数付き微分形式	77
B.5	次数付き外微分	78
B.6	次数付きシンプレクティック形式と Poisson 括弧	79
C	写像空間 $\text{Map}(\mathcal{X}, \mathcal{M})$ 上の演算規則	81
D	Lie 3-algebroid の構造定数に対する条件	83

1 序章

1.1 研究の背景

素粒子標準模型は、現在までに行われた様々な素粒子実験及び天文学などの観測事実を高い精度で説明出来る場の量子論である。素粒子標準模型は内部対称性としてゲージ対称性 $SU(3) \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ を持ち、時空に対しては大域的 Poincaré 対称性をもつ。 $SU(3)$ は強い相互作用を記述する量子色力学の対称性であり、 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ は電磁相互作用と弱い相互作用が統一された電弱統一理論の対称性である。低エネルギー領域では $SU(2)_L \times U(1)_Y$ がヒッグス機構により電磁相互作用の対称性である $U(1)_{\text{em}}$ へ破れ、弱い相互作用と電磁相互作用の統一が解ける。一方、重力を素粒子標準模型と同じ場の量子論の枠組みで統一的に扱うためには、局所的 Poincaré 対称性を考えればよい。しかしながら、重力を含む場の量子論は「くり込み不可能」であり、一般に遷移振幅等が無限大に発散してしまい、予言能力がない。従って、素粒子標準模型と一般相対性理論の場の量子論としての統一は量子重力理論を与えない。

そこで、重力相互作用を含む自然界に存在する全ての相互作用（電磁相互作用・弱い相互作用・強い相互作用・重力相互作用）を統一的に記述出来る理論の候補として超弦理論がある。超弦理論では1次元の長さをもった弦が標的空間と呼ばれる時空中を運動することを考える。弦の長さは Planck 長さ ($\sim 10^{-35}[\text{m}]$) 程度と考えられており、現在実験・観測が可能なエネルギースケールよりも十分短く、弦は点粒子に見え矛盾がない。また、標的空間中での弦の異なる振動モードが低エネルギー領域での異なる素粒子に対応すると考える。

超弦理論は重力の量子論的定式化を可能とすると期待されている。これは、超弦理論がその低エネルギー有効理論に一般相対論を含み、弦の量子化を行えば自然に重力の量子論的取り扱いが可能であろうと考えられる為である [2]。すなわち、超弦理論では重力子に対応する閉弦の散乱振幅は弦に1次元の長さがあるために発散せず、点粒子の場の理論で生じるくりこみ不可能となる問題が回避されると期待されている。

超弦理論を矛盾無く定式化するためには、標的空間が10次元時空であることが要請される [3]。しかしながら、我々が住む時空には実験・観測結果から4次元より大きい余剰次元が存在する兆候は見つかっていない。そのため、超弦理論が我々の宇宙を記述する理論であるのならば、10次元のうち余剰次元分の6次元が何らかの方法によって隠される必要がある。その方法の1つが「コンパクト化」と呼ばれる方法である [4]。コンパクト化では余剰次元方向の時空は観測にかからないほど小さな空間に丸まっていると考える。これにより、大きなス

ケールで見ると時空は4次元に見え、実験・観測で余剰次元が発見されていないことと矛盾しない。

また、余剰次元がコンパクト化される空間の形状は、コンパクト化された後に現れる4次元時空の理論（低エネルギー有効理論）の素粒子スペクトラム等を決定する。従って、現実の宇宙と超弦理論の整合性を考える上でも、どのような空間にコンパクト化されうるのか、超弦理論のコンパクト化のメカニズムについて調べることは重要である。

超弦理論のコンパクト化を考える際に、超弦理論を直接コンパクト化するのではなく、その低エネルギー有効理論である10次元超重力理論から4次元超重力理論へのコンパクト化がしばしば考えられる。超重力理論というのは超弦理論に現れる物理的な最低励起状態である無質量状態を基本場とする場の量子論である。無質量状態には計量場 $g_{\mu\nu}$ 、2階反对称テンソル場 $B_{\mu\nu}$ 場が含まれる。超重力理論の解となる背景時空では弦が矛盾なく伝搬できるため、超弦理論のコンパクト化された背景時空を調べる目的で、超重力理論の解を調べる事は意味がある。

10次元超重力理論の6次元分の余剰次元を何らかの空間にコンパクト化する際に、コンパクト化する空間の形状パラメーターがダイナミカルに定まらない場合があり、「モジュライ不安定性」と呼ばれる。これは空間の形状を決定するモジュライパラメーターが一般にポテンシャルを持たず、4次元から見るとそれが無質量場として振る舞い、現実には存在しない素粒子が理論に現れてしまう問題である。有力な解決策に、「フラックスコンパクト化」と呼ばれる方法がある [5]。フラックスコンパクト化では非自明な3階反对称テンソル場である H フラックスなどが標的空間に存在することを仮定する。標的空間をコンパクト化すると、このフラックスが4次元超重力理論上で有効ポテンシャルを作り、質量項を生み出すことができる。これによりコンパクト化された空間のモジュライパラメーターがダイナミカルに決定される。また、このフラックスは4次元超重力理論においては、ゲージ対称性の成す代数の構造定数となり、非可換ゲージ理論が実現される。素粒子標準模型に含まれる強い相互作用を記述する量子色力学は $SU(3)$ 非可換ゲージ理論であるため、フラックスコンパクト化による非可換ゲージ理論の出現は好ましい状況である。

しかしながら、10次元超重力理論のコンパクト化から標準模型を得る試みは未だ成功していない。そもそも H フラックスなどの通常の微分幾何で定義可能な「幾何学的フラックス」を用いた10次元超重力理論のコンパクト化の解には標準模型が含まれず、さらに広いクラスのコンパクト化が必要となる可能性がある。広いクラスのコンパクト化を考える上で、超弦理論が持つ「 T 双対性」と呼ばれる対称性が重要となる。

超弦理論は一般座標変換対称性とゲージ対称性を持つが、加えて弦が1次元の広がりを持っているために、点粒子の場合では見られない T 双対性と呼ばれる対称性を持つ。最も簡単な例として、10次元時空を S^1 コンパクト化する際に、半径 R 及び $R' = \frac{\alpha'}{R}$ の異なる2つの半径に時空をコンパクト化した場合、半径 R の時空側で運動量 $p = \frac{n}{R}$ 、巻き付き数 w の状態の弦と、半径 $R' = \frac{\alpha'}{R}$ の時空側で運動量 $p = \frac{w}{R'}$ 、巻き付き数 n の状態の弦が等価となる。等価というのは、弦の質量スペクトラムや散乱振幅などを弦の世界面に対する共形場理論によって計算した場合に、あらゆる量がどちらの時空上でも等しくなることを意味する。したがって、異なる標的空間の間の離散対称性である T 双対性を超弦理論は持つ。例として、以下で示す弦の質量スペクトラムは T 双対性変換の元で不変である：

$$T \text{ 双対性変換： } R \leftrightarrow R' = \frac{\alpha'}{R}, \quad n \leftrightarrow w \quad (1.1)$$

$$\text{弦の質量スペクトラム： } m^2 = \frac{n^2}{R^2} + \frac{w^2 R^2}{\alpha'^2} + \frac{1}{\alpha'} (N + \tilde{N} - 2) \quad (1.2)$$

ただし、 N, \tilde{N} は閉弦の右巻き及び左巻き振動の励起数であり、例えば重力子に対応する無質量状態では $N = \tilde{N} = 1$ である。

超弦理論は対称性として T 双対性を持つため、10次元超重力理論をコンパクト化した4次元超重力理論にも T 双対性に基づく双対性が期待される。しかし、 T 双対性変換により幾何学的フラックスである H および F フラックスが、「非幾何学的フラックス」と呼ばれる Q 及び R フラックスに変換される場合がある。たとえば、 Q フラックスは局所的には通常の微分幾何による記述が可能だが、大域的には多様体上のパッチを繋ぎ合わせる際に、微分同相写像 (diffeomorphism) に加えて T 双対性変換を行う「 T -fold」と呼ばれる空間上でなければ滑らかに繋がらない。超弦理論に特徴的な対称性である T 双対性に付随して、このような非幾何学的フラックスが現れる。

低エネルギー有効理論として素粒子標準模型を導くような広いコンパクト化を定義する為に、非幾何学的フラックスを含むコンパクト化が重要であると考えた。その根拠となる現象を、10次元の IIA 型超重力理論と IIB 型超重力理論の間に見ることが出来る。超弦理論のレベルでは IIA 型/IIB 型超弦理論は T 双対性により移り合うため、それぞれの低エネルギー有効理論である 10次元 IIA 型/IIB 型超重力理論をフラックスコンパクト化して得られる4次元超重力理論上に現れるそれぞれの有効ポテンシャル間も、 T 双対性変換により対応付くと期待される。しかしながら、対応が付かない場合がある。これに対する一つの解釈は、超重力理論に含まれるフラックスのクラスが狭い、ということである。すなわち、超重力理論上に非幾何学的フラックスを含む広いクラスのフラックスが存在している状況でフラックスコン

コンパクト化することで、4次元超重力理論上の有効ポテンシャル間に T 双対性が回復すると期待する。

非幾何学的フラックスを含むような10次元超重力理論から4次元超重力理論へのコンパクト化は次のように考えると導くことができる。例えば、幾何学的フラックスを用いたコンパクト化後に T 双対性変換を行うことで、非幾何学的フラックスを導くことが出来る。 T^6 上にトーラスコンパクト化された4次元超重力理論を考える。特に T^3 上に定数 H フラックスが存在する状況を考え、その各方向を a, b, c 方向と呼ぶ。 a, b, c 方向に isometry があるため、 T^3 は素朴には T 双対性変換を3回行うことが出来ると期待される。1度目に a 方向に対して T 双対性変換を行うと、 H_{abc} フラックスが F_{bc}^a フラックスと呼ばれるフラックスに変換される。よって、一般に H フラックスと F フラックスが共に存在する4次元超重力理論も考えることができる。このような、10次元重力理論から H 及び F フラックスを含む4次元ゲージ化超重力理論へのフラックスコンパクト化は、Scherk-Schwarz コンパクト化 [6] として実現出来ることが分かっている。

さらに2度目に b 方向に対して T 双対性変換を行うと、 F_{bc}^a フラックスが Q_c^{ab} フラックスに変換され、内部空間には T -fold の構造が現れる。 a 方向と b 方向に T 双対性変換を行った段階で、内部空間の isometry は消失するため、これ以上 c 方向へは T 双対性変換を行うことが出来ないように思える。しかし、形式的な c 方向への T 双対性変換が可能であると仮定すると、 Q_c^{ab} フラックスが R^{abc} フラックスと呼ばれるフラックスに変換されると期待される。この R^{abc} フラックスは局所的にも多価となっていると考えられ、通常の微分幾何の適応範囲を超えた非幾何学的フラックスである。これらの T 双対性変換を通じて移り合うと期待されるフラックスを図示すると以下ようになる：

$$H_{abc} \xleftrightarrow{T_a} F_{bc}^a \xleftrightarrow{T_b} Q_c^{ab} \xleftrightarrow{T_c} R^{abc}, \quad (1.3)$$

H 及び F は幾何学的フラックスであり、 Q と R は非幾何学的フラックスである。これを「フラックスチェーン」と呼ぶ [7]。

このように、コンパクト化後の4次元超重力理論において、位相的 T 双対性を取ることで、理論に非幾何学的フラックスを導入しているが、この手法により導入される非幾何学的フラックスは形式的なフラックスチェーンを取ったものに過ぎず、得られる非幾何学的フラックスが超弦理論の背景時空となるものかは明らかではない。また、非幾何学的フラックスが存在する場合の標的空間の対称性/幾何構造を表す微分幾何的表式も解明されていない。

また、コンパクト化後の4次元超重力理論の対称性をゲージ化した4次元ゲージ化超重力理論においても、非幾何学的フラックスが議論されているが、この非幾何学的フラックスは

単にゲージ変換の成す代数 (Kaloper-Myers 代数) が閉じるべく、手で導入されており、やはりそれが超弦理論の背景時空となるものかは不明で、その標的空間上での幾何学的意味も明らかではない。

一方、非幾何学的フラックスを拡張された幾何学上において解釈しようという試みとして DFT(二重場理論) 及び Double geometry(二重化幾何学) がある [8, 9]. これらの理論では、4次元超重力理論のコンパクト化された時空方向に T 双対性に対応した座標を持つ次元を加えてやり、時空の次元を $10 + 10 = 20$ と拡張する. 理論の対称性はその拡張された時空上の一般座標変換、ゲージ変換及び T 双対性変換を考える. これらの理論においては、 T 双対性変換の対称性を明示的に要求しているため、 Q 及び R フラックスを含む 20 次元時空上の有効理論が構成出来る. 20 次元上の理論を 10 次元に射影するために、「切断条件」と呼ばれる条件を手で課し、4次元時空上の有効理論を得る. しかし、10 次元超重力理論のレベルで時空を一旦拡張してしまっているため、この手法で得られる 4次元時空上の Q 及び R フラックスはもはや弦理論のコンパクト化で得られるクラスの非幾何学的フラックスではない可能性がある.

1.2 本研究の内容

低エネルギー有効理論として標準模型が現れるような超弦理論のコンパクト化を見つけるべく、非幾何学的フラックスを用いた 10 次元超重力理論のコンパクト化について理解したい. ただし、超弦理論の背景時空から逸脱しないために、DFT のような標的空間の時空次元の拡張は行わない. 加えて、非幾何学的フラックスの存在する 4次元超重力理論の時空上の対称性/背景幾何学についての微分幾何的表式を得るべく、先行研究 [7] のフラックスチェーンで行われているようなフラックスに対する形式的な T 双対性変換ではなく、 T 双対性変換に伴い背景時空の幾何構造が幾何学的フラックスが存在する場合から非幾何学的フラックスが存在する場合へどう移されるかを明らかにする. 超弦理論の背景時空を拡張することなく幾何構造を解析する為に、本研究では「一般化幾何学」及びその上の構造である「Courant algebroid」を用いた解析を行う.

一般化幾何学を用いる根拠は以下である. 重力の古典論である一般相対性理論では、時空である多様体 M は一般座標変換対称性を持ち、ベクトル場 (TM) で構成される変換の生成子は Lie 代数をなす. すなわち時空は Lie 代数の幾何構造を持つ. 一方の超弦理論の場合、標的空間の幾何構造として計量テンソル $g_{\mu\nu}$ に加え、2階反对称テンソル場 $B_{\mu\nu}$ が存在する. 計量テンソル場 $g_{\mu\nu}$ のゲージ変換はやはりベクトル場 (TM) で生成されるが、 $B_{\mu\nu}$ 場のゲージ変

換は 1 形式 (T^*M) で生成される．超弦理論では T 双対性変換によって $g_{\mu\nu}$ 場と $B_{\mu\nu}$ 場が混ざり合うため、これらのゲージ変換を記述する際は、 $g_{\mu\nu}$ 場と $B_{\mu\nu}$ 場を一纏めにした大きなテンソル場を考え、それに対するゲージ変換を構成するのが自然である．すなわち、ゲージパラメーターの住む空間を接束と余接束の直和を取った $TM \oplus T^*M$ とし、その上でゲージ変換の成す代数を考える．このように拡張された束構造は「一般化幾何学 (Generalized Geometry)」[10, 11, 12] として研究されている．一般化幾何学では標的空間の時空次元は拡張せず、あくまで標的空間上の束構造のみを $TM \oplus T^*M$ へと拡張している．

一方、Courant algebroid を用いる根拠は以下である． $TM \oplus T^*M$ 上のゲージ変換の成す代数は点粒子のゲージ変換が一般座標変換であったように、弦的なゲージ変換として”拡張された一般座標変換”と見ることができる．この $TM \oplus T^*M$ 上のゲージパラメーターの成す代数は Lie 代数の拡張である Courant algebroid の代数構造をなす．すなわち、超弦理論の標的空間は Courant algebroid の幾何構造を持つ．

Courant algebroid を系統的に構成するために、本研究では QP 多様体と呼ばれる次数付き超多様体を用いた手法を採用する [13, 14]．次数付き超多様体上に、シンプレクティック構造 ω 及びハミルトニアン関数 Θ と呼ばれる関数が与えられると QP 多様体は定まり、それに対応した Courant algebroid を定めることが出来る．先行研究では QP 多様体の手法を用いて、 H フラックスが存在する場合の Courant algebroid が構成されている．この手法を拡張し、標的空間上に非退化な Poisson 構造 $\pi^{\mu\nu}$ が存在する場合に、 QP 多様体を用いて Courant algebroid の変形である Poisson Courant algebroid の構成方法を示し、それが H フラックスの存在する場合の Courant algebroid と正準変換によって移り合い、同型である事を示す．この Poisson Courant algebroid 上には非幾何学的フラックスである R フラックスと解釈出来るフラックス $R = \wedge^3 \pi^\sharp H$ が現れ、その表式は DFT に切断条件を課した場合の R フラックスと一致する． R フラックスが存在する場合の背景時空の幾何学と考えられる Poisson Courant algebroid が得られるため、 R フラックスの微分幾何的振る舞いも明らかとなる．

さらに、標的空間に R フラックスが存在する場合の超弦理論の作用を構成する． QP 多様体が与えられた場合に、弦より一つ次元の高い 2 次元膜に対する位相的膜理論のシグマ模型を構成する方法として、AKSZ と呼ばれる手法が知られている．本研究ではこれを利用する．

標的空間に R フラックスが存在する場合の QP 多様体を既に得ているため、これに AKSZ の手法を適応することで、標的空間に R フラックスが存在する場合の位相的膜理論のシグマ模型作用を得ることが出来る．この膜に閉じた境界がある場合、膜の境界を閉弦と見なすことができ、膜の作る世界体積の境界上に位相的弦理論のシグマ模型が得られる．さらに、こ

の方法では世界体積の境界の取り方により、 R フラックスの存在する位相的弦理論及び H フラックスの存在する位相的弦理論の両方を得られ、その間の境界条件の取り替えが正準変換に対応することを示す。

標的空間に R フラックスが存在する場合の位相的弦理論のシグマ模型作用が得られたので、その理論の対称性を司るカレント代数の構成を試みる。既に標的空間に R フラックスが存在する場合の背景時空の対称性は Poisson Courant algebroid であることを示しており、カレント代数もそれと整合し Poisson Courant algebroid で記述されることが示される。ここで R フラックスの場合と同様の手続きを取ることで、標的空間に H フラックスが存在する場合の位相的弦理論のカレント代数も構成が可能であり、それが既知の Alekseev-Strobl 型カレント代数を再現するため、この手法の妥当性が確認できる。そして、 H/R フラックスが存在する場合のカレント代数がやはり正準変換により対応付くことが示される。

1.3 本論文の構成

第2章では本論文で必要となる弦理論の知識を整理する。弦理論の作用、量子化、 T 双対性、低エネルギー有効理論に現れる無質量状態およびそれを用いて書くことが出来るシグマ模型について確認する。第3章では Courant algebroid 及び QP 多様体を定義し、 QP 多様体を用いた Courant algebroid の構成方法を確認する。第4章では Courant algebroid の双対的対応物である Poisson Courant algebroid を定義し、その QP 多様体を用いた構成方法を与える。第5章では H フラックスが存在する標的空間と R フラックスが存在する標的空間、それぞれの上の2つの幾何構造 (Courant/Poisson Courant algebroid) 間の双対性について議論する。この双対性は正準変換によって結びつくことが示される。第6章では Poisson Courant algebroid が二重場理論 (double field theory) の強い切断条件 (strong section condition) を満たすことを示し、Poisson Courant algebroid と二重場理論の幾何構造の関係について議論する。また、二重場理論の幾何構造についての簡単なレビューも与える。第7章では前章までに構成した QP 多様体および AKSZ の手法を用いて、標的空間上の位相的膜理論の境界に現れる位相的弦理論を構成する。特に標的空間が Poisson Courant algebroid の幾何構造を持つ場合に、位相的膜理論の境界の取り方を変えることで、境界上の位相的弦理論に含まれるフラックスが H フラックス/ R フラックスと切り替わることを示す。第8章ではハミルトン形式の議論に移行し、前章で構成した境界上の位相的弦理論の場に対するカレント代数を調べ、それが標的空間の対称性である Courant/Poisson Courant algebroid の幾何構造を引き継いで

いることを示す．このカレント代数は Alekseev-Strobl 型である．最後に第 9 章で結果をまとめ，議論を行う．

2 弦理論の概略

ここでは、本論文で用いる弦理論の基本的事項を整理する．初めに弦の作用として Polyakov 作用を導入する．次に、弦理論の量子化を行い、弦理論のスペクトルを確認する．最後に、弦理論が持つ対称性を確認し、特に本論文で重要となる T 双対性について紹介する．ここでの議論は主に [3] に基づく．

2.1 弦の作用

弦理論では 1 次元の広がりを持った弦が d 次元時空を運動する事を考える．今後この d 次元時空のことを標的空間と呼ぶ．弦が運動すると、その運動の軌跡は標的空間中で 2 次元面をなす．これを世界面と呼ぶ．世界面上の点を指定するために、座標 (t, σ) を導入する． σ は世界面上で空間方向の位置を示し、 t は同じく世界面上で時間方向の位置を示すための座標である． (t, σ) により世界面のある 1 点が指定されると、その 1 点は同時に d 次元標的空間の 1 点も指定する．標的空間中の座標を X^μ , ($\mu = 0, 1, 2, \dots, d-1$) とすると、世界面は d 個の埋め込み関数 $X^\mu(t, \sigma)$ として記述することができる．このようにして弦理論は埋め込み写像 X^μ により、2 次元の世界面上の場の理論と捉えることが出来る．

次に弦の運動を決定する作用を与える．点粒子の場合には、その作用 S_{particle} は点粒子の運動した軌跡である世界線の長さに比例し

$$S_{\text{particle}} = -m \int dt \sqrt{-\dot{X}_\mu \dot{X}^\mu}. \quad (2.4)$$

と書ける．ただしドット $\dot{}$ は t 微分を表し、標的空間の添え字の上げ下げは標的空間の計量 $G_{\mu\nu}$ により行う．点粒子との類推により、弦の作用 S_{NG} は、弦が運動した軌跡である世界面の面積に比例すると考え、作用を

$$S_{\text{NG}} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int_\Sigma dt d\sigma \sqrt{-\det(\partial_a X^\mu \partial_b X_\mu)} \quad (2.5)$$

と考える．積分領域の Σ は世界面を表す．添え字 a, b は世界面上の添え字を表し ($a, b = 0, 1$), $\sigma^0 = t, \sigma^1 = \sigma$ である．また α' は Regge スロープと呼ばれる量で、標的空間の長さの 2 乗の次元を持つ定数である．開弦の場合はこの作用 S_{NG} は Nambu-Goto 作用と呼ばれる．Nambu-Goto 作用では世界面上の場 X^μ が平方根の中に入っており、経路積分量子化により場の量子論の構築に困難が生じる．この問題は点粒子の場合 (2.4) でも同様に起きる．

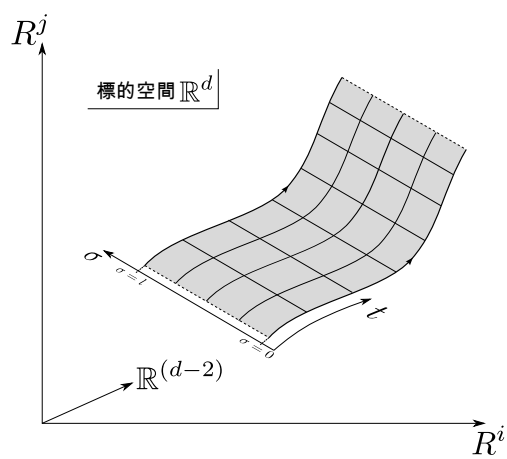


图 1: 世界面

点粒子の場合は独立な世界線計量 $\gamma = \gamma_{tt}(t)$ を導入し、作用を古典的に等価な次の作用に書き換えることで解決できる:

$$S'_{\text{particle}} = \frac{1}{2} \int dt \left(\gamma^{-1} \dot{X}^\mu \dot{X}_\mu - \gamma m^2 \right). \quad (2.6)$$

これと同様のことを弦の作用についても行う。すなわち、独立な世界面の計量 $\gamma_{ab}(t, \sigma)$ を新たに導入し、Nambu-Goto 作用を古典的に等価な Polyakov 作用に書き換える:

$$S_{\text{Polyakov}} = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int_\Sigma dt d\sigma \sqrt{-\gamma} \gamma^{ab} G_{\mu\nu} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu.$$

Polyakov 作用では通常標的空間の計量は平坦にとり、以下の量子化の議論を進める。

2.2 弦の量子化

Polyakov 作用は共形ゲージを取ると以下の形に書ける。

$$S = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2z \partial X_\mu \bar{\partial} X^\mu \quad (2.7)$$

ただし、Wick 回転を行い $z = \sigma + i\tau$ の座標系を取った。また $\partial = \frac{\partial}{\partial z}$, $\bar{\partial} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ である。場 X についての変分をとると

$$\delta_X S = -\frac{1}{\pi\alpha'} \int_\Sigma d^2z g_{\mu\nu} \delta_X X^\mu \partial \bar{\partial} X^\nu = 0 \quad (2.8)$$

であるから、運動方程式は

$$\partial \bar{\partial} X^\mu = \bar{\partial} \partial X^\mu = 0 \quad (2.9)$$

である。運動方程式の解 X^μ は、 ∂X^μ を正則関数にするもの、もしくは $\bar{\partial} X^\mu$ を反正則関数にするものである。ただし (2.8) では部分積分を行い表面項の寄与がないとしている。この部分積分において一般には表面項の寄与があるが、本論文では以下のように境界条件を課し、表面項を零にしている。それぞれの条件は Neumann 境界条件及び周期的境界条件と呼ばれるものである。本論文では重力を表す閉弦について考えるため、周期的境界条件を課す:

周期的境界条件

$$X^\mu(t, \sigma = l) = X^\mu(t, \sigma = 0)$$

$$\partial_a X^\mu(t, \sigma = l) = \partial_a X^\mu(t, \sigma = 0)$$

2.3 弦理論のスペクトラム

閉弦の場合，運動方程式 (2.9) から，on-shell の場 X は

$$\partial X^\mu : \text{正則}$$

$$\bar{\partial} X^\mu : \text{反正則}$$

である．したがって Laurent 展開により一般に

$$\partial X^\mu(z) = -i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\alpha_n^\mu}{z^{n+1}} \quad (2.10a)$$

$$\bar{\partial} X^\mu(\bar{z}) = -i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}_n^\mu}{\bar{z}^{n+1}} \quad (2.10b)$$

と表すことが出来る．展開係数 $\alpha_n^\mu, \tilde{\alpha}_n^\mu$ は留数定理により求めることが出来，共形場理論における演算子積展開の方法を用いることで，それぞれのモードに対する生成消滅演算子と同様の代数関係

$$[\alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu] = m\eta^{\mu\nu} \delta_{m+n,0}$$

$$[\tilde{\alpha}_m^\mu, \tilde{\alpha}_n^\nu] = m\eta^{\mu\nu} \delta_{m+n,0}$$

$$[\alpha_m^\mu, \tilde{\alpha}_n^\nu] = 0$$

が求まる． $\alpha_m^\mu, \tilde{\alpha}_m^\mu$ ($m > 0$) が消滅演算子， $\alpha_m^\mu, \tilde{\alpha}_m^\mu$ ($m < 0$) が生成演算子として働く．(2.10a)(2.10b) を積分することにより，場 X の演算子表示

$$X^\mu(z, \bar{z}) = x^\mu - i\frac{\alpha'}{2}p^\mu \ln |z|^2 + i\left(\frac{\alpha'}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{m} \left(\frac{\alpha_m^\mu}{z^m} + \frac{\tilde{\alpha}_m^\mu}{\bar{z}^m} \right)$$

$$p^\mu = \left(\frac{2}{\alpha'}\right)^{\frac{1}{2}} \alpha_0^\mu = \left(\frac{2}{\alpha'}\right)^{\frac{1}{2}} \tilde{\alpha}_0^\mu$$

を得る．ただし， x^μ は弦の位置の零モードで， p^μ は弦の標的空間での運動量である．

弦の振動の励起状態は，調和振動子の場合と同様に弦の基底状態 $|0; k\rangle$ に生成演算子 $\alpha_m^\mu, \tilde{\alpha}_m^\mu$ ($m < 0$) を作用させることで構成できる．ただし $|0; k\rangle$ の k は弦の重心運動量を表す：

$$p^\mu |0; k\rangle = k_\mu |0; k\rangle. \quad (2.11)$$

さらに、 $|0; k\rangle$ は消滅演算子 $\alpha_n^\mu, \tilde{\alpha}_n^\mu$ ($n > 0$) で消される弦の基底状態を表す。弦の励起状態は基底状態に生成演算子を作用させ作ることができる。弦の生成演算子は標的空間のベクトルの足を持つため、有効理論には対応したテンソル場として現れる。

例えば、第一励起状態は以下であり

$$\alpha_{-1}^\mu \tilde{\alpha}_{-1}^\nu |0; k\rangle \quad (2.12)$$

これらは一般に有効理論における 2 階のテンソル場として現れる。正確にはトレース部分はディラトン場 Φ 、対称部分は重力場 $G^{\mu\nu}$ 、反対称部分は Kalb–Ramond 場 $B^{\mu\nu}$ に相当する場として現れる。

弦は振動によるエネルギーを持つ。振動のエネルギーは弦の生成消滅演算子を用いて $\frac{1}{\alpha'}(N + \tilde{N} - 2)$ で与えられる。ただし、

$$N = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\mu=0}^9 \alpha_{-n}^\mu \alpha_{\mu n}, \quad \tilde{N} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\mu=0}^9 \tilde{\alpha}_{-n}^\mu \tilde{\alpha}_{\mu n} \quad (2.13)$$

である。

弦のそれぞれの振動状態 $|\text{Phys}; k\rangle$ は、有効場の理論においては異なる場として現れ、その質量は次の on-shell 条件によって定まる：

$$\left(-p_\mu p^\mu + \frac{1}{\alpha'}(N + \tilde{N} - 2) \right) |\text{Phys}; k\rangle = 0 \quad (2.14)$$

(2.12) 式の閉弦の第 1 励起状態は $N = \tilde{N} = 1$ であるため、振動モードからの質量への寄与がないため $m^2 = -p_\mu p^\mu = 0$ であり、無質量状態である。

2.4 T 双対性

量子化された閉弦理論の S^1 コンパクト化を考えると、 S^1 方向の並進に対応する等長変換に対して不変となり、それに応じて「T 双対性」という離散対称性が表れる。例えば、10 次元の超弦理論の標的空間の内、第 10 次元方向に $X^9 \cong X^9 + 2\pi R$ という周期的境界条件を置く。運動量は並進の生成子であるため周期境界条件 $\exp(i2\pi R p_9) = 1$ によって運動量が以下に量子化される：

$$\text{運動量 } p_9 = \frac{n}{R}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

また、弦は1次元の長さを持つため、閉弦はコンパクト化された時空方向に巻き付くことが可能なので、弦の量子状態は巻き付き数に依存する。そこで巻き付き数を次のように導入する：

$$\text{巻き付き数 } w, \quad w \in \mathbb{Z}$$

コンパクト化された場合は、閉弦の on-shell 条件が9次元の有効理論の場の質量公式を与える：

$$\sum_{k=0}^8 p_k^2 = m^2 = \frac{n^2}{R^2} + \frac{w^2 R^2}{\alpha'^2} + \frac{2}{\alpha'}(N + \tilde{N} - 2) \quad (2.15)$$

ここで、標的空間のコンパクト化されている次元の半径 R を α'/R に取り替えることを考える。すると、(2.15) 式は以下になる：

$$m^2 = \frac{n^2 R^2}{\alpha'^2} + \frac{w^2}{R^2} + \frac{2}{\alpha'}(N + \tilde{N} - 2) \quad (2.16)$$

(2.15) 式と (2.16) を見比べると、半径の入れ換え $R \leftrightarrow \alpha'/R$ と運動量と巻き付き数に関する入れ換え $n \leftrightarrow w$ を同時に行うと、弦の質量が変わらないことが分かる。この対称性は質量公式のみならず、共形場理論のレベルまで拡張することができ、理論は $(\partial X, \bar{\partial} X) \rightarrow (\partial X, -\bar{\partial} X)$ の下で不変であることが知られている。弦が1次元の長さを持つために弦理論が持つこのような関係は「 T 双対性」と呼ばれる。

2.5 弦理論のシグマ模型

閉弦の有効理論に登場する無質量の場である重力場 $G^{\mu\nu}$ 、Kalb–Ramond 場 $B_{\mu\nu}$ が非自明な値を持つ背景場中の弦の作用は以下のシグマ模型で与えられる：

$$S = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{\Sigma} d^2 z (G_{\mu\nu} + B_{\mu\nu}) \partial X^{\mu} \bar{\partial} X^{\nu} \quad (2.17)$$

Kalb–Ramond 場 $B_{\mu\nu}$ は反対称2階テンソル場であるので、微分2形式 $B = \frac{1}{2} B_{\mu\nu} dx^{\mu} \wedge dx^{\nu}$ と見なせる。ここで、 x は標的空間の座標である。ここで $X^{\mu}(\sigma)$ を埋め込み写像 $X : \Sigma \hookrightarrow M^{10}$ の σ での値と考えて背景場 B を世界面 Σ 上への X による引き戻しを考えると、作用の B 場の部分は次のように書ける：

$$\frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{\Sigma} X^* \left(\frac{1}{2} B_{\mu\nu} dx^{\mu} \wedge dx^{\nu} \right) \quad (2.18)$$

B 場の場の強さとして $H = dB$ なる反対称3階テンソル場 H を導入する。世界面 Σ を境界に持つような3次元世界体積 χ を考える。つまり境界演算子を ∂ とすると $\partial\chi = \Sigma$ である。

Stokes の定理により表面積分を体積積分に書き換えると、作用の B 場項は H 場を使って WZ 項として次のように書ける：

$$S = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{\Sigma} d^2z G_{\mu\nu} \partial X^{\mu} \bar{\partial} X^{\nu} + \frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{1}{6} \int_{\chi} \varphi^* (H_{ijk} dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k). \quad (2.19)$$

ただし、 $\varphi : \chi \hookrightarrow M^{10}$ という埋め込み写像の引き戻しによって H を 3 次元面 χ 上に引き戻している。この 3 階反对称テンソル場 H は H フラックスと呼ばれる。

本研究の目的の 1 つは非幾何学的フラックスと呼ばれる R フラックスが標的空間の背景として存在する場合の (2.19) 式に相当する弦のシグマ模型を求めることである。

3 QP 多様体を用いた標準的 Courant algebroid の構成

弦理論に備わる T 双対性のために、弦理論では標的空間 M 上の束構造として接束 TM のみを考えた Lie algebra では代数が閉じない。そこで、 M 上の束構造として接束 TM と余接束 T^*M の直和である $TM \oplus T^*M$ を考え、その上の 2 項演算として Lie bracket を拡張した Courant bracket を用いる Courant algebroid を考える。このように束を $TM \oplus T^*M$ へ拡張した構造は、一般化幾何学 [15, 16] においても議論されており、弦理論の背景幾何学であると考えられている。

本章ではまず Courant algebroid の定義を確認し、その一部のクラスであり、一般化幾何学で主に現れる標準的 Courant algebroid の定義を確認する。そして、この標準的 Courant algebroid の構成を超幾何学、特にある種の微分次数付シンプレクティック多様体である QP 多様体の手法を用いて行う方法を示す。

本節で確認する手法の延長線上に、後に示す Poisson Courant algebroid の構成、及び AKSZ と呼ばれる手法に基づく位相的膜理論の構成が議論されることとなる。

3.1 Courant algebroids

はじめに、Courant algebroid の定義を確認する。

Courant algebroid とは次の 3 つの写像を備えた M 上のベクトル束 E のことである [17, 18]。

- 束 E の切断 $\Gamma(E)$ 上に定義された擬ユークリッドメトリック $\langle -, - \rangle$

$$\langle -, - \rangle : \Gamma(E) \times \Gamma(E) \rightarrow C^\infty(M) \quad (3.20)$$

- 束写像 ρ (錨写像もしくはアンカー写像と呼ばれる)

$$\rho : E \rightarrow TM \quad (3.21)$$

- Dorfman 括弧 $[-, -]_D$

$$[-, -]_D : E \times E \rightarrow E \quad (3.22)$$

さらに、 $e_1, e_2, e_3 \in \Gamma(E)$ に対して、上記 3 つの写像は以下の関係式を満たすとする：

$$1) \quad [e_1, [e_2, e_3]_D]_D = [[e_1, e_2]_D, e_3]_D + [e_2, [e_1, e_3]_D]_D, \quad (3.23)$$

$$2) \quad \rho(e_1)\langle e_2, e_3 \rangle = \langle [e_1, e_2]_D, e_3 \rangle + \langle e_2, [e_1, e_3]_D \rangle, \quad (3.24)$$

$$3) \quad \rho(e_1)\langle e_2, e_3 \rangle = \langle e_1, [e_2, e_3]_D + [e_3, e_2]_D \rangle. \quad (3.25)$$

このとき、組 $(E, \langle -, - \rangle, \rho, [-, -]_D)$ を Courant algebroid と呼ぶ。

3.2 標準的 Courant algebroid と H フラックスによるその変形

定義からはより広いクラスの Courant algebroid が考えられるが、ここでは特に素朴に弦理論、特に一般化幾何学の考え方に対応する「標準的」 Courant algebroid を導入する。

標準的 Courant algebroid の特徴は、Courant algebroid において束写像 ρ を自然なものに取ることである：

$$\begin{aligned} TM \oplus T^*M &\rightarrow TM \\ \rho : \quad \quad \quad \rho(X + \alpha) &= X \end{aligned} \tag{3.26}$$

すなわち、 $E = TM \oplus T^*M$ 上の標準的 Courant algebroid の 3 つの写像 $(\langle -, - \rangle, \rho, [-, -]_D)$ を以下のように定義する：

$$\langle X + \alpha, Y + \beta \rangle = \iota_X \beta + \iota_Y \alpha, \tag{3.27}$$

$$\rho(X + \alpha) = X, \tag{3.28}$$

$$[X + \alpha, Y + \beta]_D = [X, Y] + \mathcal{L}_X \beta - \iota_Y d\alpha. \tag{3.29}$$

ただし $X, Y \in \Gamma(TM)$, $\alpha, \beta \in \Gamma(T^*M)$, $X + \alpha, Y + \beta \in \Gamma(TM \oplus T^*M)$ とし、 $d, \iota_X, \mathcal{L}_X$ はそれぞれ外微分、縮約、Lie 微分を表す微分幾何の標準的な表記法である。

Courant algebroid として拡張された一般座標変換に対応する拡張された Lie 微分 $\hat{\mathcal{L}}_{X+\alpha}$ を次のように Dorfman 括弧を用いて定義する：

$$\hat{\mathcal{L}}_{X+\alpha} = [X + \alpha, -]_D. \tag{3.30}$$

弦理論に現れる零質量場のみで書かれる低エネルギー有効理論には、コンパクト化を考えたときに、一般に B 場が微分幾何の意味で「閉」(closed) でない場合、非自明な $H = dB$ なる 3 形式 H フラックスが存在する。この H フラックスを用いて、Courant algebroid の条件を満たしたまま標準的 Courant algebroid を変形（ツイスト）することが出来る。変形（ツイスト）された標準的 Courant algebroid は次で定義される：

- 内積は変更せず：

$$\langle X + \alpha, Y + \beta \rangle = \iota_X \beta + \iota_Y \alpha$$

- 束写像は変更せず：

$$\rho(X + \alpha) = X$$

- Dorfman 括弧を以下に変更：

$$[X + \alpha, Y + \beta]^H = [X, Y] + \mathcal{L}_X \beta - \iota_Y d\alpha + \iota_X \iota_Y H. \quad (3.31)$$

この H フラックスにより変形（ツイスト）された新しい Courant algebroid は特に完全 Courant algebroid と呼ばれる。完全と呼ばれる所以は、完全系列 $0 \rightarrow T^*M \rightarrow TM \oplus T^*M \rightarrow TM \rightarrow 0$ が成立するためである。すなわち、 $H = dB$ であるため、 H フラックスは微分形式の意味で「完全」という意味である。

Severa 類 $H^3(M, \mathbf{R})$ というコホモロジーによる分類から、標準的 Courant algebroid に加えることが出来る独立な変形自由度は H フラックスで尽きており、 R フラックス等の他のフラックスでは同様な標準的 Courant algebroid の変形を行うことは出来ないことが分かっている [19]。Poisson Courant algebroid のコホモロジー構造については 5.2 章で議論する。

3.3 QP 多様体

本小説では微分次数付シンプレクティック多様体である QP 多様体なるものを定義する。そして、それを用いて先に定義した標準的 Courant algebroid を構成する方法を示す。 QP 多様体を用いて標準的 Courant algebroid を構成することで、後の AKSZ と呼ばれる手法を用いた位相的シグマ模型の構成の見通しが良くなる。

3.3.1 次数付き多様体

本論文で考える次数付き多様体 \mathcal{M} は、微分可能な多様体 M 上に $\mathcal{C}^\infty(U) \otimes S^\bullet(V)$ と局所同型な \mathbb{Z} -graded 可換代数が構造層として入っている環付き空間である。ここで、 U は M 上の局所座標、 V は M 上にファイバーとして入る次数付きベクトル空間、 S^\bullet は次数付き自由可換環である。すなわち、通常の超多様体の場合と同様に、 \mathbb{Z} -graded というのは束のファイバーが次数付き環となっているものであり、次数が偶数の変数は可換で奇数の場合は反可換となる代数構造を持つものである¹。

¹数学的に厳密な定義は [20, 21] に与えられる。

3.3.2 P 多様体

定義 3.1 P 多様体

以下の条件を満たす多様体を *Poisson* の頭文字を取って次数 n の P 多様体 (M, ω) と呼ぶ：

- M が次数付多様体である.
- M 上に全次数² $n + 2$ のシンプレクティック構造 ω が存在する.

このとき, シンプレクティック構造 ω は P 構造 と呼ばれる.

3.3.3 QP 多様体

定義 3.2 QP 多様体

以下の条件を満たす多様体を QP 多様体 $(M, \omega, Q)[13]$ と呼ぶ：

- (M, ω) が P 多様体である.
- 次の条件を満たす M 上のベクトル場 Q が存在する：
 - 全次数： $|Q| = 1$
 - 冪零性： $Q^2 = 0$ (Q はホモロジカル)
 - 整合性： $\mathcal{L}_Q \omega = 0$

ただし, $|Q|$ は Q の全次数を表す. このとき, ホモロジカルベクトル場 Q は Q 構造 と呼ばれる.

3.3.4 Q 構造の構成法

ここまでの議論により, P 多様体 (M, ω) と Q 構造が与えられれば, QP 多様体が1つ定まることが分かった. 本小節では P 多様体 (M, ω) が与えられている場合に, Q 構造を見つけるための1つの処方箋を示す.

以下でまず, P 多様体上の次数付き Poisson 括弧を定義する

²本論文では, ゴースト数と \mathbb{Z} -graded 代数の次数の和を「全次数」と呼ぶ. 特に断りなく「次数」と言う場合は, \mathbb{Z} -graded 代数の次数を意味する.

定義 3.3 P 多様体上の次数付き Poisson 括弧

P 多様体 (M, ω) に対して, $C^\infty(M)$ 上の次数付 Poisson 括弧を次で定義する:

$$\{f, g\} = (-1)^{|f|+n+1} \iota_{X_f} \iota_{X_g} \omega \quad (3.32)$$

ただし, $|f|$ は関数 $f \in C^\infty(M)$ に対する次数を表し, X_f, X_g は次数付きハミルトニアンベクトル場であり任意の $f \in C^\infty(M)$ に対して $\iota_{X_f} \omega = -\delta f$ と定義される. ι は内部積, δ は M 上の外微分である.

このことから, 次数 n の P 多様体上の Poisson 括弧は次数を $-n$ だけずらす作用がある事が分かる.

上記で定義した次数付き Poisson 括弧 $\{-, -\}$ を用いて, 任意の P 多様体に対して次数 $n+1$ の任意関数 $\Theta \in C^\infty(M)$ からハミルトニアンベクトル場 Q を構成することが出来る.

すなわち, ハミルトニアンベクトル場 Q を Θ を用いて次のように定める:

$$Q = \{\Theta, -\}. \quad (3.33)$$

このとき, 次の条件:

$$\text{古典マスター方程式: } \{\Theta, \Theta\} = 0 \quad (3.34)$$

を満たすならば

$$\text{ホモロジカル条件: } Q^2 = 0 \quad (3.35)$$

が成り立つ.

証明 次数付 Jacobi 恒等式 (B.324) より以下が従う:

$$\{\Theta, \{\Theta, -\}\} = \{\{\Theta, \Theta\}, -\} + (-1)^{(|\Theta|-n)(|\Theta|-n)} \{\Theta, \{\Theta, -\}\} \quad (3.36)$$

$|\Theta| = n+1$ であるので,

$$\Rightarrow 2\{\Theta, \{\Theta, -\}\} = \{\{\Theta, \Theta\}, -\} \quad (3.37)$$

したがって $\{\Theta, \Theta\} = 0$ を満たすならば,

$$Q^2 = \{\Theta, \{\Theta, -\}\} = \frac{1}{2} \{\{\Theta, \Theta\}, -\} = 0 \quad (3.38)$$

が成り立つ.

このような Θ はホモロジカル関数もしくはハミルトニアン関数と呼ばれる. (3.34) 式を古典マスター方程式と呼ぶ. 以上のことから, QP 多様体を構成するためには P 多様体 (M, ω) とハミルトニアン関数 Θ を定めれば良い.

3.4 QP 多様体を用いた標準的 Courant algebroid の構成

一般の Courant algebroid が次数 2 の QP 多様体から構成可能であることが先行研究により示されている [22]. 本小節では具体的な次数 2 の QP 多様体を用いて, 標準的 Courant algebroid を構成する. 次数 2 の QP 多様体に対する古典マスター方程式の解であるハミルトニアン関数 Θ から, どのように Courant algebroid の構造が現れるのかを調べる.

本節ではまず, QP 多様体を用いて一般のベクトル束 E 上の Courant algebroid を構成する一般論を展開し, その後具体例としてベクトル束 E が標準的 $E = TM \oplus T^*M$ となる標準的 Courant algebroid の構成法を示す.

始めに, ベクトル束 E として滑らかな多様体 M 上のファイバー V を考える. これに対し超多様体 $\mathcal{M} = T^*[2]E[1]$ を考える. ただし $E[n]$ という表記法はその束のファイバーについて \mathbb{Z} -graded な次数を n だけずらすことを意味する.

M 上の局所座標として x^i を取り, E の切断の基底として e^a を取る. $E[1]$ のファイバー $V[1]$ の局所座標として η^a を取る. つまりベクトル束 $E[1]$ の局所座標は (x^i, η^a) である. $V[1]$ 上にファイバー計量 $\langle -, - \rangle$ を定めることで, $V[1]$ と $V^*[1]$ をベクトル空間として同一視出来る. 従って $V^*[1]$ に対しても $V[1]$ と同じ座標変数 η^a を用いることが出来る. つまり, $V[1]$ の $T^*[2]$ に対しても同じ座標変数 η^a を使うこととする. そして最後に $T^*[2]M$ のファイバーの局所座標として ξ_i を用いることとする. 最終的に $\mathcal{M} = T^*[2]E[1]$ は局所座標 (x^i, η^a, ξ_i) で張られ, それぞれの座標変数の次数は $(0, 1, 2)$ である. 全体の状況を図示すると以下になる.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M} & \longrightarrow & E[1] \\ \downarrow & & \downarrow \\ T^*[2]M & \longrightarrow & M \end{array}$$

次にベクトル束 E を超多様体 \mathcal{M} に埋め込む埋め込み写像 j を定義する.

$$j : E \oplus TM \rightarrow \mathcal{M}.$$

この埋め込み写像 j は局所座標に対して

$$j : \left(x^i, e^a, \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \mapsto (x^i, \eta^a, \xi_i). \quad (3.39)$$

と作用する. 例えば切断 $e \in \Gamma(E)$ の押し出しは $E[1]$ 上の関数である. 以後本論文では誤解のない限り E と j_*E に対して同じ記号を用いる.

構造層を次数によって展開することが出来る．すなわち， \mathcal{M} 上の関数全体の空間を $C^\infty(\mathcal{M}) = \sum_{i \geq 0} C_i(\mathcal{M})$ と展開出来る．ただし $C_i(\mathcal{M})$ は次数 i の滑らかな関数全体の空間を表す．写像 j によって以下の等価性が分かる：

$$C_0(\mathcal{M}) \simeq C^\infty(M),$$

$$C_1(\mathcal{M}) \simeq \Gamma(E),$$

$$C_2(\mathcal{M}) \simeq \Gamma(\wedge^2 E \oplus TM)$$

etc.

次数 2 の QP 多様体を導入するために，まずは \mathcal{M} 上に次数 2 の次のシンプレクティック構造を入れる：

$$\omega = \delta x^i \wedge \delta \xi_i + \frac{1}{2} k_{ab} \delta \eta^a \wedge \delta \eta^b, \quad (3.40)$$

ここで， $\langle \eta^a, \eta^b \rangle = k^{ab}$ をファイバー計量とした．シンプレクティック構造を入れたことで， P 構造となり次数付 Poisson 括弧 $\{x^i, \xi_j\} = \delta_j^i, \{\eta^a, \eta^b\} = k^{ab}$ の構造が入る．

次に Q 構造を入れるために，次数 3 のホモロジカル関数 Θ を導入する．(3.33) 式から分かるように，ホモロジカル関数 Θ を定めれば，Poisson 括弧より自動的に Q が一意に定まる．そして，先に述べたように，この Q は QP 多様体となるための条件を自動的に満たす物となっている．一般の次数 3 のホモロジカル関数を局所座標系で書けば

$$\Theta = \rho_a^i(x) \xi_i \eta^a + \frac{1}{3!} C_{abc}(x) \eta^a \eta^b \eta^c, \quad (3.41)$$

ただし $\rho_a^i(x), C_{abc}(x)$ は任意の x に依存する局所関数で，次数はともに 0 である．ホモロジカル関数 Θ は古典マスター方程式 (3.34), $\{\Theta, \Theta\} = 0$, を満たさなくてはならないので， $\rho_a^i(x), C_{abc}(x)$ に対して条件が課されることとなる．以上の三つ組み (\mathcal{M}, ω, Q) をもって次数 2 の QP 多様体は定義される．

これらの超幾何学の手法を Courant algebroid に繋げるべく，Poisson 括弧及び「導来括弧」と呼ばれる括弧を用いる．以前に定義した擬メトリック，Dorfman 括弧，アンカー写像は次数付 Poisson 括弧を用いて書くことが出来る：

$$\begin{aligned}
\langle e^1, e^2 \rangle &\equiv j^* \{j_* e^1, j_* e^2\}, \\
[e^1, e^2]_D &\equiv -j^* \{\{j_* e^1, \Theta\}, j_* e^2\}, \\
\rho(e)f &\equiv j^* \{j_* e, \{\Theta, j_* f\}\},
\end{aligned} \tag{3.42}$$

ただし f は M 上の関数で $e, e^1, e^2 \in \Gamma(E)$ である．古典マスター方程式のおかげで，これら 3 つの操作は Courant algebroid の条件を満たす．

特にベクトル束が $E = TM \oplus T^*M$ の場合は局所座標として (x^i, q^i, p_i, ξ_i) を取る．それぞれの座標変数の次数は $(0, 1, 1, 2)$ である．それぞれ x^i は M 上の局所座標， q^i はファイバー $T[1]M$ の局所座標， p_i はファイバー $T^*[1]M$ の局所座標， ξ_i はファイバー $T^*[2]M$ の局所座標である．先の一般論の η^a との関係は $\eta^a = (q^i, p_i)$ となっている．ファイバー計量は $k = \begin{pmatrix} 0 & \delta_j^i \\ \delta_j^i & 0 \end{pmatrix}$ とし，次数付シンプレクティック形式は

$$\omega = \delta x^i \wedge \delta \xi_i + \delta q^i \wedge \delta p_i. \tag{3.43}$$

となる．この ω に対して Poisson 括弧は以下のように定まる：

$$\{x^i, \xi_j\} = \{q^i, p_j\} = \delta_j^i. \tag{3.44}$$

ここでもし Q 関数として

$$\Theta = \xi_i q^i + \frac{1}{3!} H_{ijk}(x) q^i q^j q^k, \tag{3.45}$$

をとれば，得られる Courant algebroid は標準的 Courant algebroid となる．アンカー写像 ρ は $TM \oplus T^*M$ から TM への自然な射影となり，Dorfman 括弧は (3.31) 式のものとなる．この具体例は我々の興味のあるところである．

4 QP 多様体を用いた Poisson Courant algebroid の構成

前章では QP 多様体を用いて標準的 Courant algebroid を構成した。本章では、これと同様の手法を用いて Poisson Courant algebroid という特殊なクラスの Courant algebroid を QP 多様体を用いて構成する [23]。Poisson Courant algebroid というのは、Poisson 多様体上の Courant algebroid である。まず、Poisson Courant algebroid の定義を与え、次に QP 多様体を用いた Poisson Courant algebroid の構成方法を示す。

4.1 Poisson 構造

以下ではベクトル場の反対称テンソル積 \wedge を考え、 p 個の積を p ベクトルと呼ぶ。また、 p ベクトルの集合は以下のように書かれ

$$\Gamma(\wedge^\bullet TM) = \{X_1 \wedge X_2 \cdots X_p | X_i \in \Gamma(TM), p \leq \dim M\} \quad (4.46)$$

一般にポリベクトルと呼ぶ。特に 2 ベクトル $\pi \in \Gamma(\wedge^2 TM)$ が

$$[\pi, \pi]_S = 0 \quad (4.47)$$

を満たすとき、Poisson 構造と呼ぶ。ただし、 $[-, -]_S$ は Schouten 括弧であり、ベクトル場の Lie 括弧を \wedge 積に関する双微分演算子としての Leibniz 則を満たすように拡張したものである（詳しくは付録 A を参照）。対 (M, π) で表される Poisson 多様体は Poisson 構造 π を備えた多様体 M である。

4.2 Poisson Courant algebroid

4.2.1 Poisson 多様体上の微分幾何

Poisson 多様体上には Poisson 構造 π を用いて、次に示す反変幾何学と呼ばれる微分代数を定義することができる。ただし、Poisson 構造は Poisson 条件：

$$[\pi, \pi]_S = 0 \quad (4.48)$$

を満たすものを考える。これは通常の微分幾何学の双対に相当する。

1. 外微分に相当する演算 $d_\pi : \wedge^n TM \rightarrow \wedge^{n+1} TM$ は任意の $a \in \wedge^\bullet TM$ に対して以下で定義する：

$$d_\pi a = [\pi, a]_S \quad (4.49)$$

通常の外微分 d と同じく d_π は冪零性 ($d_\pi^2 = 0$) を持つ。

証明 Schouten 括弧に対する Jacobi 恒等式 (A.270) より、以下が従う：

$$[\pi, [\pi, -]_S]_S = [[\pi, \pi]_S, -]_S + (-1)^{(|\pi|-1)(|\pi|-1)} [\pi, [\pi, -]_S]_S \quad (4.50)$$

$|\pi| = 2$ 及び Poisson 条件から、

$$\Rightarrow 2[\pi, [\pi, -]_S]_S = [[\pi, \pi]_S, -]_S = 0 \quad . \quad (4.51)$$

従って、

$$d_\pi^2 = [\pi, [\pi, -]_S]_S = \frac{1}{2} [[\pi, \pi]_S, -]_S = 0 \quad (4.52)$$

である。

2. 縮約 $\iota_\alpha : \wedge^{n+1} TM \rightarrow \wedge^n TM$ は任意の $\alpha \in \Gamma(T^*M)$, $X \in \Gamma(TM)$ に対して以下で定義する：

$$\iota_\alpha X = \iota_X \alpha \quad (4.53)$$

任意のポリベクトル $a, b \in \Gamma(\wedge^\bullet TM)$ に対する縮約は以下で定義される：

$$\iota_\alpha(a \wedge b) = (\iota_\alpha a) \wedge b + (-1)^{|a|} a \wedge \iota_\alpha b \quad (4.54)$$

3. ミュージカル写像 $\pi^\sharp : \Gamma(T^*M) \rightarrow \Gamma(TM)$ は以下で定義する：

$$\pi^\sharp(\alpha) = \iota_\alpha \pi = \pi^{ij} \alpha_i(x) \frac{\partial}{\partial x^j} \quad (4.55)$$

4. Lie 括弧に相当する Koszul 括弧 $[-, -]_\pi : \Gamma(T^*M) \times \Gamma(T^*M) \rightarrow \Gamma(T^*M)$ は任意の $\alpha, \beta \in \Gamma(T^*M)$ に対して以下で定義する：

$$[\alpha, \beta]_\pi = L_{\pi^\sharp(\alpha)} \beta - L_{\pi^\sharp(\beta)} \alpha - d(\iota_\beta \iota_\alpha \pi) \quad (4.56)$$

通常 Lie 括弧と同様に Koszul 括弧は反対称である：

$$[\alpha, \beta]_\pi = -[\beta, \alpha]_\pi \quad (4.57)$$

5. Lie 微分に対応する写像 $\mathcal{L}_\alpha^\pi : TM \rightarrow TM$ は任意の $X \in \Gamma(TM)$ に対して以下で定義する：

$$\mathcal{L}_\alpha^\pi X = (d_\pi \iota_\alpha + \iota_\alpha d_\pi)X \quad (4.58)$$

これは微分形式における Cartan の公式の形となっている．一般のポリベクトルに関しては，Leibniz 則によって定義される．

4.2.2 Poisson Courant algebroid

Poisson Courant algebroid³とは Poisson 多様体 (M, π) 上のベクトル束 $E = TM \oplus T^*M$ の上に，Courant algebroid の条件を満たす三種の写像 (3.23)-(3.25) が存在している代数である．Poisson Courant algebroid は，特に以下の写像で定義される：

1. 内積 $\langle -, - \rangle$ は標準的 Courant algebroid から変更せず：

$$\langle X + \alpha, Y + \beta \rangle = \iota_X \beta + \iota_Y \alpha$$

2. 束写像 ρ を以下に変更：

$$\begin{aligned} TM \oplus T^*M &\rightarrow TM \\ \rho : \quad \rho(X + \alpha) &= \pi^\sharp(\alpha) \quad (\text{双対束写像}) \end{aligned} \quad (4.59)$$

3. Dorfman 括弧 $[-, -]_D$ を以下に変更：

$$[X + \alpha, Y + \beta]_R^\pi \equiv [\alpha, \beta]_\pi + \mathcal{L}_\alpha^\pi Y - \iota_\beta d_\pi X - \iota_\alpha \iota_\beta R \quad (\text{双対 Dorfman 括弧}) \quad (4.60)$$

ただし $X + \alpha, Y + \beta \in \Gamma(TM \oplus T^*M)$ であり， R フラックスと呼ばれる 3 ベクトル場 $R \in \Gamma(\wedge^3 TM)$ を導入した．特に Poisson 構造に対する微分に対して「閉」となる，つまり $d_\pi R = [\pi, R]_S = 0$ なる条件を満たす R は Poisson Courant algebroid の変形自由度を与えるフラックスである．したがって，Poisson Courant algebroid の構造は四つ組み $(E = TM \oplus T^*M, \langle -, - \rangle, [-, -]_R^\pi, \rho = 0 \oplus \pi^\sharp)$ が全て司る．

Poisson Courant algebroid は標準的 Courant algebroid に対する双対な対応物と見なすことが出来る．双対というのは多様体上のベクトル場と微分形式を双対関係と思う心と同じである．すなわち 1 形式 T^*M 上の世界の幾何学は，ベクトル TM 上の世界の幾何学において TM と T^*M の役割を入れ替えたもので表現される．双対な世界の幾何学は Poisson Geometry などでも議論されている [24, 25]．

³双対 Courant algebroid もしくは反変 Courant algebroid とも呼ばれる．

4.3 超幾何学的構成

Poisson Courant algebroid を定義したので、次に超幾何学の手法により Poisson Courant algebroid を構成する．そのために、標準的 Courant algebroid の時と同じ次数付多様体 $\mathcal{M} = T^*[2]E[1] = T^*[2]T^*[1]M$ を考える．局所座標についても同じ記号 (x^i, q^i, p_i, ξ_i) を使い、次数付シンプレクティック形式も (3.43) 式と同じものを用いる．

Poisson Courant algebroid の場合は、 Q 構造 を決定するホモロジカル関数として以下を用いる：

$$\Theta = \pi^{ij}(x)\xi_i p_j - \frac{1}{2} \frac{\partial \pi^{jk}}{\partial x^i}(x) q^i p_j p_k + \frac{1}{3!} R^{ijk}(x) p_i p_j p_k, \quad (4.61)$$

ただし、 π^{ij}, R^{ij} は局所座標基底を $\frac{\partial}{\partial x^i}$ としたときの 2 ベクトル $\pi = \frac{1}{2} \pi^{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j} \in \Gamma(\wedge^2 TM)$ 、及び 3 ベクトル $R = \frac{1}{3!} R^{ijk}(x) \frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j} \wedge \frac{\partial}{\partial x^k}$ の係数である．このホモロジカル関数 Θ は π が Poisson 構造 $[\pi, \pi]_S = 0$ であり R が閉 $d_\pi R = [\pi, R]_S = 0$ の場合古典マスター方程式 $\{\Theta, \Theta\} = 0$ を満たし、 Θ は Q 構造 を定める．

証明 まず、ポアソン条件 $[\pi, \pi]_S = 0$ は以下の条件を与える：

$$\begin{aligned} [\pi, \pi]_S &= 0 \quad (4.62) \\ \Leftrightarrow [\pi, \pi]_S &= \left[\frac{1}{2} \pi^{ij} \partial_i \wedge \partial_j, \frac{1}{2} \pi^{lm} \partial_l \wedge \partial_m \right]_S \\ &= \frac{1}{4} ([\pi^{ij} \partial_i, \pi^{lm} \partial_l] \partial_j \wedge \partial_m - [\pi^{ij} \partial_i, \partial_m] \partial_j \wedge \pi^{lm} \partial_l - [\partial_j, \pi^{lm} \partial_l] \pi^{ij} \partial_i \wedge \partial_m) \\ &= \pi^{il} (\partial_l \pi^{jk}) \partial_i \wedge \partial_j \wedge \partial_k = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{3!} \pi^{[il} (\partial_l \pi^{jk]) = 0 \quad (4.63) \end{aligned}$$

R フラックスが d_π に対して閉であることは以下の条件を与える：

$$\begin{aligned} d_\pi R &= 0 \quad (4.64) \\ \Leftrightarrow d_\pi R &= \left[\frac{1}{2} \pi^{ij} \partial_i \wedge \partial_j, \frac{1}{3} R^{lmn} \partial_l \wedge \partial_m \wedge \partial_n \right]_S \\ &= \frac{1}{6} \pi^{ij} (\partial_j R^{lmn}) \partial_i \wedge \partial_l \wedge \partial_m \wedge \partial_n - \frac{1}{4} R^{lmn} (\partial_n \pi^{ij}) \partial_i \wedge \partial_j \wedge \partial_l \wedge \partial_m \\ &= \left\{ \frac{1}{6} \pi^{im} (\partial_m R^{jkl}) - \frac{1}{4} (\partial_m \pi^{ij}) R^{klm} \right\} \partial_i \wedge \partial_j \wedge \partial_k \wedge \partial_l = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{4!} \left(\frac{1}{6} \pi^{[i|m} (\partial_m R^{jkl])} - \frac{1}{4} (\partial_m \pi^{[ij}) R^{kl]m} \right) = 0 \quad (4.65) \end{aligned}$$

古典マスター方程式は以下となる：

$$\begin{aligned}
\{\Theta, \Theta\} &= \Theta \overleftarrow{\partial}_i \pi^{ij} p_j - \pi^{ij} p_j \partial_i \Theta - \frac{1}{2} (\partial_i \pi^{jk}) p_j p_k \frac{\partial}{\partial p_i} \Theta + \Theta \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p_i} \left(-\frac{1}{2} (\partial_i \pi^{jk}) p_j p_k \right) \\
&= 2 \left((\partial_i \pi^{lm}) \xi_l p_m - \frac{1}{2} (\partial_i \partial_l \pi^{mn}) q^l p_m p_n + \frac{1}{3!} (\partial_i R^{lmn} p_l p_m p_n) \right) \pi^{ij} p_j \\
&\quad - (\partial_i \pi^{jk}) p_j p_k \left(\pi^{li} \xi_l + (\partial_l \pi^{im}) q^l p_m + \frac{1}{2} R^{ilm} p_l p_m \right) \\
&= (2(\partial_l \pi^{ij}) \pi^{lk} - \pi^{il} (\partial_l \pi^{jk})) \xi_i p_j p_k \\
&\quad - ((\partial_i \pi^{ml}) (\partial_m \pi^{jk}) + (\partial_m \partial_i \pi^{jk}) \pi^{ml}) q^i p_j p_k p_l \\
&\quad + \left(\frac{1}{3} \pi^{im} (\partial_m R^{jkl}) - \frac{1}{2} (\partial_m \pi^{ij}) R^{klm} \right) p_i p_j p_k p_l \\
&= \frac{1}{2!} (2(\partial_l \pi^{i[j} \pi^{l]k}] - \pi^{il} (\partial_l \pi^{[jk]})) \xi_i p_j p_k \\
&\quad - \frac{1}{3!} ((\partial_i \pi^{m[l} (\partial_m \pi^{jk]}) + \pi^{m[l} (\partial_i \partial_m \pi^{jk]}) q^i p_j p_k p_l \\
&\quad + \frac{1}{4!} \left(\frac{1}{3} \pi^{[i|m} (\partial_m R^{jkl])} - \frac{1}{2} (\partial_m \pi^{[ij}) R^{kl]m} \right) p_i p_j p_k p_l \\
&= \frac{1}{2!} (\pi^{li} (\partial_l \pi^{[jk]}) + \pi^{lj} (\partial_l \pi^{[ki]}) + \pi^{lk} (\partial_l \pi^{[ij]}) \xi_i p_j p_k \\
&\quad - \frac{1}{3!} \partial_i (\pi^{m[l} (\partial_m \pi^{jk]}) q^i p_j p_k p_l \\
&\quad + \frac{1}{4!} \left(\frac{1}{3} \pi^{[i|m} (\partial_m R^{jkl])} - \frac{1}{2} (\partial_m \pi^{[ij}) R^{kl]m} \right) p_i p_j p_k p_l \\
&= \frac{1}{2!} \pi^{li} (\partial_l \pi^{jk]) \xi_i p_j p_k \\
&\quad - \frac{1}{3!} \partial_i (\pi^{m[l} (\partial_m \pi^{jk]}) q^i p_j p_k p_l \\
&\quad + \frac{1}{4!} \left(\frac{1}{3} \pi^{[i|m} (\partial_m R^{jkl])} - \frac{1}{2} (\partial_m \pi^{[ij}) R^{kl]m} \right) p_i p_j p_k p_l \\
&= 0
\end{aligned} \tag{4.66}$$

最終行に移る際に (4.63), (4.65) を用いた.

すなわち, π がポアソン構造 $[\pi, \pi]_S = 0$ であり, R フラックスが d_π に対して閉 $d_\pi R = 0$ の 2 つが Poisson Courant algebroid となるための条件である.

Poisson Courant algebroid に表れる $C^\infty(T^*[1]M \oplus T[1]M) \cong \Gamma(TM \oplus T^*M)$ 上の全ての演算は導来括弧を用いて書くことが出来る:

$$\rho(X + \alpha)f(x) = j^*\{\{X^i(x)p_i + \alpha_i(x)q^i, \Theta\}, f(x)\}, \quad (4.67)$$

$$[X + \alpha, Y + \beta]_R^\pi = j^*\{\{X^i(x)p_i + \alpha_i(x)q^i, \Theta\}, Y^j(x)p_j + \beta_j(x)q^j\}, \quad (4.68)$$

$$\langle X + \alpha, Y + \beta \rangle = j^*\{j_*(X + \alpha), j_*(Y + \beta)\}. \quad (4.69)$$

ただし、写像 j は (3.39) で定義されている。

証明は局所座標を用いて具体的に計算することで、以下のように与えられる。

1. (4.67) 式は

$$\rho(X + \alpha)f(x) = j^*\{\{X^i(x)p_i + \alpha_i(x)q^i, \Theta\}, f(x)\} = \pi^{ij}\alpha_i \frac{\partial f}{\partial x^j}(x), \quad (4.70)$$

となり、これは Poisson Courant algebroid の束写像 $\rho = 0 \oplus \pi^\sharp : TM \oplus T^*M \rightarrow TM$ と一致した。

2. (4.68) 式は

$$\begin{aligned} [X + \alpha, Y + \beta]_R^\pi &= j^*\{\{X^i(x)p_i + \alpha_i(x)q^i, \Theta\}, Y^j(x)p_j + \beta_j(x)q^j\} \\ &= \left(\alpha_j \pi^{jk} \frac{\partial Y^i}{\partial x^k} + \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \pi^{jk} \beta_k - \frac{\partial X^j}{\partial x^k} \pi^{ki} \beta_j - \frac{\partial \alpha_j}{\partial x^k} \pi^{ki} Y^j \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \pi^{ki}}{\partial x^j} X^j \beta_k - \frac{\partial \pi^{ji}}{\partial x^k} \alpha_j Y^k - R^{jki} \alpha_j \beta_k \right) j^* p_i \\ &\quad + \left(\alpha_j \pi^{jk} \frac{\partial \beta_i}{\partial x^k} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j} \pi^{jk} \beta_k + \frac{\partial \pi^{jk}}{\partial x^i} \alpha_j \beta_k \right) j^* q^i \\ &= [\alpha, \beta]_\pi + L_\alpha^\pi Y - \iota_\beta d_\pi X - R(\alpha, \beta, -), \end{aligned} \quad (4.71)$$

となり、(4.60) 式で定めた $TM \oplus T^*M$ 上の Poisson Courant algebroid の Dorfman 括弧と一致した。

このことから、 QP 多様体及び導来括弧を用いて Poisson Courant algebroid の演算を全て導出することが出来た。

3. (4.69) 式は明らかに Poisson Courant algebroid の内積と一致する。

従って、Poisson Courant algebroid の束写像、双対 Dorfman 括弧、内積を全て導来括弧で書くことが出来た。 QP 多様体の手法によって Poisson Courant algebroid の構築が行えたと言える。

Courant algebroid の特殊なクラスである Poisson Courant algebroid では関数 Θ が古典マスター方程式 $\{\Theta, \Theta\} = 0$ を満たすことから、以下の関係式が自動的に成り立つ：

$$\rho([e_1, e_2]_R^\pi) = [\rho(e_1), \rho(e_2)], \quad (4.72)$$

$$[e_1, [e_2, e_3]_R^\pi]_R^\pi = [[e_1, e_2]_R^\pi, e_3]_R^\pi + [e_2, [e_1, e_3]_R^\pi]_R^\pi, \quad (4.73)$$

$$\rho(e_1)\langle e_2, e_3 \rangle = \langle [e_1, e_2]_R^\pi, e_3 \rangle + \langle e_2, [e_1, e_3]_R^\pi \rangle, \quad (4.74)$$

$$\rho(e_1)\langle e_2, e_3 \rangle = \langle e_1, [e_2, e_3]_R^\pi + [e_3, e_2]_R^\pi \rangle, \quad (4.75)$$

ただし、一般化ファイバーの元 $e_i \in \Gamma(TM \oplus T^*M)$ である。したがって、これは Courant algebroid になっている。

従って、 PQ 多様体からホモロジカル関数 Θ の選び方によって、標準的 Courant algebroid と Poisson Courant algebroid の両方を構成することができることが分かった。

標準的 Courant algebroid に対する古典マスター方程式は次の条件を与える：

$$\Theta = \tau_j^i(x)\xi_i q^j + \frac{1}{3!}H_{ijk}(x)q^i q^j q^k \quad (4.76)$$

$$\tau_j^i = \delta_j^i \quad (4.77)$$

一方、Poisson Courant algebroid に対する古典マスター方程式は次の条件を与える：

$$\Theta = \sigma^{ij}(x)\xi_i p_j + \frac{1}{2}Q_i^{jk}(x)q^i p_j p_k + \frac{1}{3!}R^{ijk}(x)p_i p_j p_k. \quad (4.78)$$

$$\sigma = \pi, \quad Q_i^{jk}(x) = -\frac{\partial \pi^{jk}}{\partial x^i}(x) \quad (4.79)$$

同様に、一般に Courant algebroid になり得る $E = TM \oplus T^*M$ 上のもっとも一般のホモロジカル関数 Θ は以下で与えられる：

$$\Theta = \tau_j^i(x)\xi_i q^j + \sigma^{ij}(x)\xi_i p_j + \frac{1}{3!}H_{ijk}(x)q^i q^j q^k + \frac{1}{2}F_{ij}^k(x)q^i q^j p_k + \frac{1}{2}Q_i^{jk}(x)q^i p_j p_k + \frac{1}{3!}R^{ijk}(x)p_i p_j p_k. \quad (4.80)$$

これに対する古典マスター方程式は、同様に各フラックス τ, σ, H, F, Q, R に対する条件を与える。簡単な τ と σ の部分に注目すれば、以下の条件が課される：

$$\tau_k^i \sigma^{jk} + \sigma^{ik} \tau_k^j = 0 \quad (4.81)$$

これに対する素朴な解は以下である：

1. $\tau = 0, \sigma \neq 0$

2. $\tau \neq 0, \sigma = 0$

一般のフラックスが混在したハミルトニアン関数 Θ に対する Courant algebroid となるための制限条件が得られた.

5 H フラックスと R フラックスの双対性

本研究の目的の1つは H フラックス存在下の標的空間と R フラックスの存在下の標的空間の、2つの幾何学の双対性を明らかにすることである。前節までで H フラックスが存在する場合は標的空間の幾何学は標準的 Courant algebroid であり、 R フラックスが存在する場合の標的空間の幾何学は Poisson Courant algebroid になることをみた。本節ではこれらの2つの Courant algebroid 間の双対性について超幾何学とホモロジカル代数を用いて解析することで、2つのスラックス間の双対性を明らかにする。

この双対性は次数付シンプレクティック多様体 (P 多様体) 上での正準変換に対応する。また、この双対性は、微分形式上の de Rham コホモロジーとポリベクトル空間上の Poisson コホモロジーの対応関係の拡張として捉えることができる。

以下では、標準的 Courant algebroid のホモロジカル関数 (3.45) 式を Θ_H 、Poisson Courant algebroid のホモロジカル関数 (4.61) 式を Θ_R と表記する。

5.1 フラックス双対性と正準変換

標準的 Courant algebroid と Poisson Courant algebroid の間の双対変換を構成するために、それぞれのホモロジカル関数 Θ_H, Θ_R の間の双対性変換を考える。この双対性変換を考えることで、標準的 Courant algebroid のコホモロジーと Poisson Courant algebroid のコホモロジーの間の双対性もみることができる。以下ではポアソン構造 π が非退化である場合を考える。

5.1.1 QP 多様体上での正準変換

まず始めに、 P 多様体上での正準変換を定義しよう。関数 $\alpha \in C^\infty(\mathcal{M})$ に対して e^{δ_α} という指数関数的随伴変換を以下で定義する：

$$e^{\delta_\alpha} f = f + \{f, \alpha\} + \frac{1}{2} \{\{f, \alpha\}, \alpha\} + \cdots, \quad (5.82)$$

ただし、 $f \in C^\infty(\mathcal{M})$ は任意関数である。Poisson 括弧は次数 $-n$ を持っているので、 $|\alpha| = n$ の場合は、変換 e^{δ_α} は次数を保存し、任意の $f, g \in C^\infty(\mathcal{M})$ の Poisson 括弧は

$$\{e^{\delta_\alpha} f, e^{\delta_\alpha} g\} = e^{\delta_\alpha} \{f, g\} \quad (5.83)$$

の関係式を満たす [26]。従って、(5.83) を δ_α による正準変換と呼ぶ。

5.1.2 フラックス双対性

P 多様体 $(T^*[2]T^*[1]M, \omega)$ 上に標準的 Courant algebroid と Poisson Courant algebroid の両方の構造を入れることが出来る．従って， H フラックス と R フラックス の間のフラックス双対変換 T を，ホモロジカル関数を $T: \Theta_H \rightarrow \Theta_R$ と移す $T^*[2]T^*[1]M$ 上の正準変換として構成することを考える．ただし，

$$\Theta_C = \xi_i q^i \quad (5.84)$$

$$\Theta_H = \xi_i q^i + \frac{1}{3!} H_{ijk}(x) q^i q^j q^k \quad (5.85)$$

$$\Theta_R = \pi^{ij}(x) \xi_i p_j - \frac{1}{2} \frac{\partial \pi^{jk}}{\partial x^i}(x) q^i p_j p_k + \frac{1}{3!} R^{ijk}(x) p_i p_j p_k, \quad (5.86)$$

である．この2つのホモロジカル関数を結びつける正準変換を，以下で B 変換と β 変換を組み合わせることで構成出来ることを示す．具体的に計算することで，以下の関係を得る：

$$\begin{aligned} \Theta_R &= e^{-\delta_{\alpha q}} e^{\delta_{\alpha p}} e^{-\delta_{\alpha q}} \Theta_C \\ &= e^{-\delta_{\alpha q}} e^{\delta_{\alpha p}} \Theta_H \end{aligned} \quad (5.87)$$

ただし $\alpha_p = \frac{1}{2} \pi^{ij}(x) p_i p_j$ はいわゆる β 変換を生成し， $\alpha_q = \frac{1}{2} \pi_{ij}^{-1}(x) q^i q^j$ は B 変換を生成する．ここで， H フラックスと R フラックスの関係は以下で与えられる：

$$R = \wedge^3 \pi^\# H \quad (5.88)$$

ただし，写像 $\wedge^k \pi^\#: \Omega^k(M) \rightarrow \wedge^k \Gamma(TM)$ を用いた．この正準変換は QP 多様体の座標基底に対しては，

$$e^{-\delta_{\alpha q}} e^{\delta_{\alpha p}} e^{-\delta_{\alpha q}} x^i = x^i, \quad (5.89)$$

$$e^{-\delta_{\alpha q}} e^{\delta_{\alpha p}} e^{-\delta_{\alpha q}} q^i = \pi^{ij}(x) p_j, \quad (5.90)$$

$$e^{-\delta_{\alpha q}} e^{\delta_{\alpha p}} e^{-\delta_{\alpha q}} p_i = -\pi_{ij}^{-1}(x) q^j, \quad (5.91)$$

$$e^{-\delta_{\alpha q}} e^{\delta_{\alpha p}} e^{-\delta_{\alpha q}} \xi_i = \xi_i + \frac{\partial \pi^{jk}}{\partial x^i} \pi_{kl}^{-1}(x) p_j q^l. \quad (5.92)$$

と作用する．Liouville1-形式は次のように変換する：

$$\vartheta = \xi_i \delta x^i - q^i \delta p_i \rightarrow \vartheta' = \xi_i \delta x^i - p_i \delta q^i. \quad (5.93)$$

$j^*\pi^\sharp(\alpha) = (e^{\delta_{\alpha p}} - 1)j^*\alpha$ であることに注意されたい.

以上より, 次のようにフラックス双対性変換が定義出来る:

フラックス双対変換 フラックス双対変換は2つの QP 多様体間のシンプレクティック同型写像 T である.

$$T: \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_2$$

以上の議論より, H フラックスの存在する標準的 Courant algebroid に対し, 正準変換として B 変換と β 変換を施すことで, R フラックスの存在する Poisson Courant algebroid へ変換される双対性の存在が示された. 後でみるように, 境界のある膜のシグマモデルにおいてはフラックス双対変換は境界条件の取り替えに対応する.

5.2 Courant algebroid 間のコホモロジーの双対性

本節では二つの異なる QP 多様体を用いることで $T^*[2]T^*[1]M$ 上に構成することの出来る Courant/Poisson Courant algebroid の間のコホモロジーの双対性について議論する.

それぞれの QP 多様体を構成するためのハミルトニアン関数は Θ_H と Θ_R である. ハミルトニアン関数 Θ_H と Θ_R によって定義される次数付きハミルトニアンベクトル場は, (3.35) $Q^2 = 0$ を満たす. よって, $Q_H = \{\Theta_H, -\}$ と $Q_R = \{\Theta_R, -\}$ は QP 多様体 $\mathcal{M} = T^*[2]T^*[1]M$ 上の関数に作用し次数を1上げる微分演算子であり, それぞれ余境界作用素と見なせる. 関数全体の空間を次数により $C^\infty(\mathcal{M}) = \sum_{i \geq 0} C_i(\mathcal{M})$ と展開すれば, $(C_\bullet(\mathcal{M}), Q)$ は二つの余境界作用素に対して余鎖複体をなす. これはまさに先行研究でも議論されている $Q = Q_H$ もしくは $Q = Q_R$ とした場合の Courant algebroid の標準的複体である [27]. $(C_\bullet(\mathcal{M}), Q_H)$ は標準的 Courant algebroid コホモロジー $H_{SCA}^\bullet(M, Q_H)$ を定め, $(C_\bullet(\mathcal{M}), Q_R)$ は Poisson Courant algebroid コホモロジー $H_{PCA}^\bullet(M, Q_R)$ を定める. 特別な部分空間上では, 上記の二つのコホモロジーは既存のコホモロジーと一致する.

既存のコホモロジーと一致することを示すためには, 3.4 小節で示したように Courant algebroid から次数付多様体への埋め込み写像 $j: E \oplus TM \rightarrow T^*[2]T^*[1]M$ が存在することを用いる. ここで $E = TM \oplus T^*M$ 上に Courant algebroid が存在している. それぞれの局所座標 $(\frac{\partial}{\partial x^i}, dx^i, \frac{\partial}{\partial x^i}) \in \Gamma(E \oplus TM)$ で与えられている. ただし, ベクトル場 $\frac{\partial}{\partial x^i}$ が二つあるが, 第一のベクトル場は E 中の TM の基底であり, 第三のベクトル場はアンカー写像 ρ の像空間の基

底である．局所座標は (3.39) の埋め込み写像 j により

$$j : \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, dx^i, \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \mapsto (p_i, q^i, \xi_i) \quad (5.94)$$

と移される．

5.2.1 de Rham コホモロジーとの関係

まず始めに H フラックスのある場合の標準的 Courant algebroid を考えよう． $T[1]M$ は T^*M に同型であるから，部分空間 $C^\infty(T[1]M)$ を考えよう．この部分空間の次数 s の元は

$$\gamma = \frac{1}{s!} \gamma_{i_1 \dots i_s}(x) q^{i_1} \cdots q^{i_s}. \quad (5.95)$$

である． γ は引き戻し j^* により s 形式に写像される：

$$j^* \gamma = \frac{1}{s!} \gamma_{i_1 \dots i_s}(x) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_s}. \quad (5.96)$$

従って， $C^\infty(T[1]M)$ は微分形式の空間 $\Omega^\bullet(M)$ と等価である．さらに Q_H が $C^\infty(T[1]M)$ に作用する演算は $\Omega^\bullet(M)$ 上での de Rham 微分 (外微分) d に相当する：

$$d(j^* \gamma) = -j^* Q_H \gamma. \quad (5.97)$$

従って， $C^\infty(T[1]M)$ 上に制限された (p^i, ξ_i) を含まない 標準的 Courant algebroid コホモロジー $H_{SCA}^\bullet(M, Q_H)$ は de Rham コホモロジーに等価である：

$$H_{SCA}^\bullet(M, Q_H) \Big|_{C^\infty(T[1]M)} \cong H_{dR}^\bullet(M, d). \quad (5.98)$$

5.2.2 Poisson コホモロジーとの関係

次に Poisson Courant algebroid の場合を考える． $T^*[1]M$ は TM に同型であるから，部分空間 $C^\infty(T^*[1]M)$ を考えよう．この部分空間の次数 s の元は

$$u = \frac{1}{s!} u^{i_1 \dots i_s}(x) p_{i_1} \cdots p_{i_s}. \quad (5.99)$$

である． u は引き戻し j^* により s ベクトルに写像される：

$$j^*u = \frac{1}{s!} u^{i_1 \cdots i_s}(x) \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_s}}. \quad (5.100)$$

従って $C^\infty(T^*[1]M)$ はポリベクトル場の空間 $\wedge^\bullet(TM)$ と等価である．

特に $R=0$ のとき， Θ_R は以下で与えられる：

$$\Theta_R \Big|_{R=0} = -\{j_*\pi, \Theta_0\} = -\left\{ \frac{1}{2} \pi^{jk}(x) p_j p_k, \xi_i q^i \right\}, \quad (5.101)$$

ただし $\Theta_0 = \Theta_H \Big|_{H=0} = \xi_i q^i$ の意味である．したがって

$$Q_R u = \left\{ \Theta_R \Big|_{R=0}, u \right\} = -\{j_*\pi, \Theta_0\}, u\}, \quad (5.102)$$

となる．ただし $u \in C^\infty(T^*[1]M)$ とし， $\{\Theta_R - \Theta_{R=0}, u\} = \{\frac{1}{3!} R^{ijk}(x) p_i p_j p_k, u\} = 0$ であることを用いた． $\Theta_{H=0}$ に対する導来括弧 $\{-, \Theta_{H=0}\}, -\}$ は $C^\infty(T^*[1]M)$ に制限したとき，Schouten 括弧 $[-, -]_S$ と等価であることから， Q_R の $u \in C^\infty(T^*[1]M)$ に対する作用は Poisson 外微分 $d_\pi = [\pi, -]_S$ のポリベクトル空間 $\wedge^\bullet(M)$ への作用と等価である：

$$d_\pi(j^*u) = -j^*Q_R u = [\pi, j^*u]_S. \quad (5.103)$$

ただし，ここでは $\pi \in \wedge^2(TM)$ である．この余境界作用素 d_π で M 上に定義されるコホモロジーは Poisson コホモロジー $H_P^k(M, d_\pi)$ と呼ばれ，これは余境界作用素 Q_R で M 上に定義される Poisson Courant コホモロジー $H_{PCA}^\bullet(M, Q_R)$ を $C^\infty(T^*[1]M)$ 上に制限したものと等価である：

$$H_{PCA}^\bullet(M, Q_R) \Big|_{C^\infty(T^*[1]M)} \cong H_P^\bullet(M, d_\pi). \quad (5.104)$$

5.2.3 コホモロジー間の双対性

本節ではこれまで考えていた標準的 Courant algebroid コホモロジー $H_{SCA}^\bullet(M, Q_H)$ と Poisson Courant algebroid コホモロジー $H_{PCA}^\bullet(M, Q_R)$ が同型であることを示す．この同型性は偶数次元多様体上で非退化な Poisson 構造が存在する場合に成り立ち，シンプレクティック多

様体上で de Rham コホモロジーと Poisson コホモロジーが同型 $H_{dR}^k(M, d) \simeq H_P^k(M, d_\pi)$ であるというよく知られた結果の一般化と捉えられる [25].

写像 $\wedge^k \pi^\sharp : \Omega^k(M) \rightarrow \wedge^k(TM)$ は de Rham コホモロジーから Poisson コホモロジーへの準同型写像を誘導する：

$$\wedge^k \pi^\sharp : H_{dR}^k(M, d) \rightarrow H_P^k(M, d_\pi).$$

特に π^{-1} がシンプレクティック構造ならば、微分形式 $\Omega^\bullet(M)$ 上の de Rham コホモロジーはポリベクトル空間上 $\wedge^\bullet(TM)$ 上の Poisson コホモロジーと同型である：

$$H_{dR}^k(M, d) \cong H_P^k(M, d_\pi). \quad (5.105)$$

これまで議論してきたフラックス双対性においては、de Rham コホモロジーは $H_{SCA}^\bullet(M, Q_H)$ に拡張され、Poisson コホモロジーは $H_{PCA}^\bullet(M, Q_R)$ に拡張された。また H フラックスと R フラックスの双対性は二つのコホモロジー $H_{SCA}^\bullet(M, Q_H)$ と $H_{PCA}^\bullet(M, Q_R)$ の間の双対性としてみることが出来る。

$M = T^*[2]T^*[1]M$ 上の一般の関数 $f \in C^\infty(M)$ を考えよう。(5.87) 式より、二つの余境界作用素に対する双対性 $Q_H f = 0 \iff Q_R(e^{\delta_{\alpha q}} e^{\delta_{\alpha p}} f) = 0$ 及び $f = Q_H g \iff f = Q_R(e^{\delta_{\alpha q}} e^{\delta_{\alpha p}} g)$ が分かる。したがって Q_H 鎖複体の要素から Q_R 鎖複体の要素への写像 T が存在する：

$$T : f \mapsto e^{\delta_{\alpha p}} e^{-\delta_{\alpha q}} e^{\delta_{\alpha p}} f. \quad (5.106)$$

鎖複体間のフラックス双対性写像 $T : C_\bullet(M) \rightarrow C_\bullet(M)$ はコホモロジー間の同型写像 $T : H_{SCA}^\bullet(M, d_H) \rightarrow H_{PCA}^\bullet(M, d_R)$ を引き起こす。つまり以下の定理を得る。

フラックス同型定理 π は非退化なポアソン構造、すなわち π^{-1} が存在しそれがシンプレクティック構造であるとする。 $R = \wedge^3 \pi^\sharp H$ とする。このとき、標準的 Courant algebroid コホモロジーは Poisson Courant algebroid コホモロジーと同型である：

$$H_{SCA}^k(M, Q_H) \cong H_{PCA}^k(M, Q_R). \quad (5.107)$$

6 二重場理論から見た Poisson Courant algebroids

この節では、Poisson Courant algebroid が二重場理論 (double field theory) の強い切断条件 (strong section condition) を満たすことを示す。このことは Poisson Courant algebroid が二重場理論の幾何学を反映したものであることを示している。

6.1 二重場理論

二重場理論は Courant algebroid の対称性を保ちながら、さらに T 双対対称性をあらわに持った場の理論の候補として提唱された理論である。

超重力理論では M 上のファイバー束 TM を考え、 TM 上の場の理論を考える。一般化幾何学による超重力理論の定式化において、ファイバー束 TM を $TM \oplus T^*M$ へ拡張することで、一般座標変換対称性と Kalb–Ramond B 場のゲージ変換対称性を統一的に扱うことが出来る。

一方、二重場理論では標的空間の多様体 M を $\widehat{M} = M \times \tilde{M}$ へ拡張し、これに対するファイバー束 $T\widehat{M} = T(M \times \tilde{M})$ 上の場の理論を考える。二重化された配位空間 $\widehat{M} = M \times \tilde{M}$ を考え、その局所座標を $\mathbf{x}^I = (x^i, \tilde{x}_i)$ とする。これに対する接ベクトル場 $\Gamma(T\widehat{M})$ の基底は $\partial_I = (\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i})$ である。

一般化幾何学 (標準的 Courant algebroid) と二重化幾何学の関係は以下のようになる：

- 一般化幾何学における一般化接ベクトル場は

$$\mathbf{X} = X^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} + \tilde{X}_i(x) dx^i \in \Gamma(TM \oplus T^*M) \quad (6.108)$$

である。一方、二重化幾何学における接ベクトル場は

$$\widehat{\mathbf{X}} = \widehat{\mathbf{X}}^I \partial_I = X^i(x, \tilde{x}) \frac{\partial}{\partial x^i} + \tilde{X}_i(x, \tilde{x}) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i} \in \Gamma(T\widehat{M} = T(M \times \tilde{M})) \quad (6.109)$$

である。ここで、 $X^i(x, \tilde{x}), \tilde{X}_i(x, \tilde{x})$ の \tilde{x} 依存性を捨て、 $\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i} \sim dx^i$ と同一視することで、

$$\widehat{\mathbf{X}} \Big|_{\tilde{\partial}^i \bullet = 0} \sim \mathbf{X} \quad (6.110)$$

となる。ただし、 \bullet は任意のベクトル場を表し、

$$\tilde{\partial}^i \bullet = 0 \quad (6.111)$$

は超重力枠制限と呼ばれ、ベクトル場の \tilde{x} 依存性を落とす操作を表す。この操作は二重場理論においては切断条件 (section condition)

$$\partial_I \bullet \tilde{\partial}^I \bullet = 0 \quad (6.112)$$

と呼ばれる拘束条件へ一般化される。超重力枠制限は切断条件を満たす1つの解である。

- 一般化幾何学では内積 $\Gamma(TM \oplus T^*M) \times \Gamma(TM \oplus T^*M) \rightarrow C^\infty(M)$ は自然な縮約によって以下のように定義された：

$$\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle = \langle X^i \partial_i + \tilde{X}_i dx^i, Y^j \partial_j + \tilde{Y}_j dx^j \rangle = X^i(x) \tilde{Y}_i(x) + \tilde{X}_i(x) Y^i(x) \quad (6.113)$$

ただし、右辺が x のみの関数であることを強調した。

二重化幾何学では上記の構造を反映した以下の内積 $\Gamma(T\widehat{M}) \times \Gamma(T\widehat{M}) \rightarrow C^\infty(\widehat{M})$ を用いる：

$$\langle \widehat{\mathbf{X}}, \widehat{\mathbf{Y}} \rangle = \langle X^i \partial_i + \tilde{X}_i \tilde{\partial}^i, Y^j \partial_j + \tilde{Y}_j \tilde{\partial}^j \rangle = X^i(x, \tilde{x}) \tilde{Y}_i(x, \tilde{x}) + \tilde{X}_i(x, \tilde{x}) Y^i(x, \tilde{x}) \quad (6.114)$$

右辺が (x, \tilde{x}) の関数であることを強調した。よって、

$$\langle \widehat{\mathbf{X}}, \widehat{\mathbf{Y}} \rangle \Big|_{\tilde{\partial}^i \bullet = 0} = \langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle \quad (6.115)$$

が成り立つ。ただし、 $\widehat{\mathbf{X}}, \widehat{\mathbf{Y}} \in \Gamma(T\widehat{M})$, $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \Gamma(TM \oplus T^*M)$ であり、 $\widehat{\mathbf{X}} \Big|_{\tilde{\partial}^i \bullet = 0} \sim \mathbf{X}$, $\widehat{\mathbf{Y}} \Big|_{\tilde{\partial}^i \bullet = 0} \sim \mathbf{Y}$ が成り立つ場合である。

- 一般化幾何学では拡張された一般座標変換は (3.30) のように Dorfman 括弧で表される。一方、二重化幾何学では拡張された一般座標変換は次の D 括弧で表される：

$$\hat{\mathcal{L}}_{\widehat{\mathbf{X}}} \widehat{\mathbf{Y}} = [\widehat{\mathbf{X}}, \widehat{\mathbf{Y}}]_D = \left(\widehat{\mathbf{X}}^I \partial_I \widehat{\mathbf{Y}}_J - \widehat{\mathbf{Y}}^I \partial_I \widehat{\mathbf{X}}_J + \widehat{\mathbf{Y}}_I \partial_J \widehat{\mathbf{X}}^I \right) \partial^J \quad (6.116)$$

$$= [\widehat{\mathbf{X}}, \widehat{\mathbf{Y}}]_D + \tilde{X}_i \tilde{\partial}^i \widehat{\mathbf{Y}} - \tilde{Y}_i \tilde{\partial}^i \widehat{\mathbf{X}} + \left(\tilde{Y}_i \tilde{\partial}^j X^i + Y^i \tilde{\partial}^j \tilde{X}_i \right) \partial_j \quad (6.117)$$

ただし、 $\widehat{\mathbf{X}}, \widehat{\mathbf{Y}}$ に対する Dorfman 括弧は、(6.110) の同一視の下で \tilde{x} 座標をパラメーターとして取り扱う。また、(6.116) での添字の上げ下げは $O(d, d)$ 計量 $\eta_{IJ} = \langle \partial_I, \partial_J \rangle = \begin{pmatrix} 0 & \delta_j^i \\ \delta_i^j & 0 \end{pmatrix}$ で行う。(6.117) より、以下が成り立っている：

$$[\widehat{\mathbf{X}}, \widehat{\mathbf{Y}}]_D \Big|_{\tilde{\partial}^i \bullet = 0} = [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]_D \quad (6.118)$$

このように、二重化幾何学において超重力枠制限 $\tilde{\partial} \bullet = 0$ を取り、 $\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i} \sim dx^i$ と同一視すること、一般化幾何学に帰着することが分かる。

6.2 QP 多様体による Poisson 構造及び二重場理論

この節では二重場理論 [28] の幾何学を QP 多様体の言葉で定式化する．まず，二重化された多様体 \widehat{M} の局所座標を (y^i, \tilde{y}_i) とする．次数 2 の QP 多様体 $T[2]\widehat{M}$ を考え，その局所ファイバー座標を $(\eta_i, \tilde{\eta}^i)$ とする．ただし， $\{y^i, \eta_j\} = \{\tilde{y}_j, \tilde{\eta}^i\} = \delta^i_j$ を満たすように方向を合わせる．二重場理論に対応する超幾何学を構成するには，さらに $(T[2] \oplus T[1])\widehat{M}$ 上の $\{q^i, p_j\} = \delta^i_j$ を満たす正準共役座標 (q^i, p_i) を導入する．ここで，各局所座標の次数は $(y^i, \tilde{y}_i, \eta_i, \tilde{\eta}^i, q^i, p_i) = (0, 0, 2, 2, 1, 1)$ である．

この P 多様体上では，二重場理論の幾何学は次で与えられるホモロジカル関数 Q を用いて定式化される：

$$\Theta_C = \eta_i q^i + \tilde{\eta}^i p_i. \quad (6.119)$$

古典マスター方程式 $\{\Theta_C, \Theta_C\} = 0$ は

$$\tilde{\eta}^i \eta_i = 0. \quad (6.120)$$

を与えるが，これを超多様体上での二重場理論の弱い拘束条件と捉え，次のように Poisson 括弧を取った際に 0 となる代数に関する拘束と考える：

$$\{\{f(y, \tilde{y}, p, q), \tilde{\eta}^i \eta_i\}, g(y, \tilde{y}, p, q)\} = \tilde{\partial}^i f \partial_i g + \partial_i f \tilde{\partial}^i g = 0. \quad (6.121)$$

ただし $f, g \in \Gamma(T[1]\widehat{M}) \oplus C^\infty(\widehat{M})$ である．これは切断条件を課すことと等価である [29]．

D 括弧は導来括弧を用いて次のように定義される：

$$[e_1, e_2]_D = -j^* \{\{j_* e_1, \Theta_C\}, j_* e_2\} \quad (6.122)$$

同様に C 括弧を以下で定義する：

$$[e_1, e_2]_C = -\frac{1}{2} \left(j^* \{\{j_* e_1, \Theta_C\}, j_* e_2\} - j^* \{\{j_* e_2, \Theta_C\}, j_* e_1\} \right), \quad (6.123)$$

ここで e_1, e_2 は $T\widehat{M}$ の切断である．埋め込み写像 j は

$$j : (\partial_i, \tilde{\partial}^i, \partial_i, \tilde{\partial}^i) \mapsto (p_i, q^i, \eta_i, \tilde{\eta}^i) \quad (6.124)$$

二重化された配位空間 \widehat{M} 内に物理的な自由度に対応する d 次元の非自明な部分配位空間 $M \subset \widehat{M}$ を考える．この物理的な配位空間の局所座標は x^i であり， M は Poisson 構造 π を持つと仮定する．

このとき, (y^i, \tilde{y}^i) から (x^i, \tilde{x}^i) への座標変換は次の Jacobian を持つ:

$$\frac{\partial(x, \tilde{x})}{\partial(y, \tilde{y})} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^i}{\partial y^j} & \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{y}^j} \\ \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial y^j} & \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial \tilde{y}^j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_j^i & \pi^{ij} \\ 0 & \delta_i^j \end{pmatrix}. \quad (6.125)$$

この座標変換は, 元の Θ_C の正準関数 $\alpha_p = \frac{1}{2}\pi^{ij}(x)p_i p_j$ による変形 (ツイスト) と見ることが出来る. 変形前のホモロジカル関数を $\Theta'_C = \xi_i q^i + \tilde{\xi}^i p_i$ と書き直せば, α_p による正準変換はホモロジカル関数を次のように変換する:

$$\Theta_C = e^{\alpha_p} \Theta'_C = \xi_i q^i + \tilde{\xi}^i p_i + \pi^{ij} \xi_i p_j - \frac{1}{2} \frac{\partial \pi^{jk}}{\partial x^i}(x) q^i p_j p_k. \quad (6.126)$$

この変形を座標変換としてみれば, 次の座標変換としてみることが出来る:

$$\eta_i = \xi_i - \frac{1}{2} \frac{\partial \pi^{jk}}{\partial x^i}(x) p_j p_k, \quad (6.127)$$

$$\tilde{\eta}^i = \tilde{\xi}^i - \pi^{ij} \xi_j. \quad (6.128)$$

(6.128) 第二項が存在するため, (6.125) 中 (1, 2) 成分にポアソン構造 π が入ったと理解出来る. 切断条件は次のように変形される:

$$\tilde{\xi}^i \left(\xi_i - \frac{1}{2} \frac{\partial \pi^{jk}}{\partial x^i}(x) p_j p_k \right) = 0. \quad (6.129)$$

この切断条件を満たすように $\tilde{\xi}^i = 0$ を満たす部分空間を取る. このために, $\tilde{\xi}^i$ を含む Poisson 括弧も全て 0 になると要請すると, $\tilde{\partial} \bullet = 0$ で定義される物理的な部分多様体に制限することに対応する. 以下では $\tilde{x} = 0$ に制限する場合を考える. そして, 物理的な部分空間に制限されたホモロジカル関数は標準的 Courant algebroid と Poisson Courant algebroid のそれぞれのホモロジカル関数の和となる:

$$\Theta_C|_{\tilde{x}=0} = \Theta_{H=0} + \Theta_{R=0}. \quad (6.130)$$

部分空間上では Θ_C についてのマスター方程式から $\{\Theta_{H=0}, \Theta_{R=0}\} = 0$ が分かるため, Θ_C は 1 つの double complex を定義している. 実際に $\Theta_{H=0} + \Theta_{R=0}$ は $TM \oplus T^*M$ 上の Lie bialgebroid を定義する [30]. H と R が 0 でない場合は proto-Lie bialgebroid を定義することが知られている [27, 31]. もし完全 Courant algebroid [19] が構成可能ならば, 古典マスター方程式の解は 2 つのフラックスの関係式を与えることになる.

正準変換により切断条件が $\tilde{\eta}^i = 0$ から $\tilde{\xi}^i = 0$ と変わったため, 一般に配位空間 M が \widehat{M} 内に直積 $M \times \tilde{M}$ として埋め込まれているという保証はない. ただ, M は \widehat{M} 内で非自明な部分多様体をなしている.

最後にホモロジカル関数 (6.119) に B 変形と β 変形を施した場合の具体形を示す：

$$\begin{aligned}
e^{-\delta_B} e^{-\delta_\beta} \Theta_C = & (\eta_i - B_{mi} \tilde{\eta}^m) q^i + (\tilde{\eta}^i - \eta_m \beta^{mi} + \tilde{\eta}^n B_{nm} \beta^{mi}) p_i \\
& + \frac{1}{2} \left[-B_{in} \tilde{\partial}^i B_{rs} + \partial_n B_{rs} \right] q^n q^r q^s \\
& + \left[\frac{1}{2} \tilde{\partial}^i B_{mn} + (B_{lm} \tilde{\partial}^l B_{ns} - \partial_m B_{ns} + \frac{1}{2} B_{ls} \tilde{\partial}^l B_{mn} - \frac{1}{2} \partial_s B_{mn}) \beta^{si} \right] p_i q^m q^n \\
& + \left[\frac{1}{2} \partial_i \beta^{hk} - \frac{1}{2} B_{li} \tilde{\partial}^l \beta^{hk} + \tilde{\partial}^h B_{in} \beta^{nk} \right. \\
& \left. - \frac{1}{2} \left[-B_{li} \tilde{\partial}^l B_{rs} + \partial_i B_{rs} - B_{ls} \tilde{\partial}^l B_{ir} + \partial_s B_{ir} + B_{lr} \tilde{\partial}^l B_{is} - \partial_r B_{is} \right] \beta^{sh} \beta^{rk} \right] q^i p_h p_k \\
& + \left[\frac{1}{2} \tilde{\partial}^i \beta^{hk} - \frac{1}{4} \partial_l \beta^{ih} \beta^{lk} - \frac{1}{4} \beta^{li} \partial_l \beta^{hk} + \frac{1}{4} B_{ln} \tilde{\partial}^l \beta^{ih} \beta^{nk} \right. \\
& + \frac{1}{4} B_{ln} \beta^{ni} \tilde{\partial}^l \beta^{hk} - \frac{1}{2} \tilde{\partial}^i B_{mn} \beta^{nh} \beta^{mk} \\
& \left. + \frac{1}{3!} (-B_{ln} \tilde{\partial}^l B_{rs} + \partial_n B_{rs} - B_{ls} \tilde{\partial}^l B_{nr} + \partial_s B_{nr} + B_{lr} \tilde{\partial}^l B_{ns} - \partial_r B_{ns}) \beta^{si} \beta^{rh} \beta^{nk} \right] p_i p_h p_k,
\end{aligned} \tag{6.131}$$

ただし、 $\beta = \frac{1}{2} \beta^{ij}(y, \tilde{y}) p_i p_j$ 及び $B = \frac{1}{2} B_{ij}(y, \tilde{y}) q^i q^j$ は元の座標 (y, \tilde{y}) に対する関数 $C^\infty(M \times \tilde{M})$ である。(6.131) には全ての 3 階のフラックス H, F, Q, R がポテンシャルの形で同時に入っている。

- (6.131) にて $\beta^{ij} = 0$ かつ超重力枠 ($\tilde{\eta}^i = \tilde{\partial}^i = 0$) を取り、以下の読み替え：

$$H_{ijk} = \frac{1}{2} \partial_{[i} B_{jk]} \tag{6.132}$$

を用いると、 H フラックスにより変形された標準的 Courant algebroid のホモロジカル関数 Θ_H (5.84) に一致する。

- (6.131) にて $B_{ij} = 0$ かつ超重力枠の双対 ($\eta_i = \partial_i = 0$) を取り、以下の読み替え：

$$R^{ijk} = \frac{1}{2} \tilde{\partial}^{[i} \beta^{jk]} \tag{6.133}$$

を用いると、双対な対応物が得られる。

7 位相的膜理論の構成

QP 多様体によって標的空間を取り扱うことにより、標的空間上の位相的シグマ模型を AKSZ と呼ばれる手法を用いて構成することが出来る。AKSZ では次数 n の場合は $n + 1$ 次元の世界体積を持つ位相的シグマ模型となる。本論文では次数 2 の QP 多様体を考えるため、3 次元世界体積すなわち 3 次元位相的膜理論となる。

特に、標的空間に Poisson Courant algebroid の構造を対称性として持つ位相的膜理論の構成方を示す。標準的 Courant algebroid に基づく位相的膜理論の構成方法は [32, 33] にて示されているが、これに倣い Poisson Courant algebroid に基づく位相的膜理論を構成する。この膜理論は境界のある 3 次元世界体積理論であり、3 ベクトル場である R フラックスの入った模型となる。初めに、AKSZ シグマ模型 [34, 35, 36] について確認する。

7.1 AKSZ シグマ模型

世界体積に対応する次数付可微分多様体 \mathcal{X} 、 \mathcal{X} 上の外微分 D 、非退化積分測度 μ の三つ組み (\mathcal{X}, D, μ) を考える。標的空間に対応する (\mathcal{M}, ω, Q) を QP 多様体とする。 \mathcal{X} から \mathcal{M} への滑らかな写像全体の空間を $\text{Map}(\mathcal{X}, \mathcal{M})$ とする。

$$\text{Map}(\mathcal{X}, \mathcal{M}) = \left\{ f \left| \begin{array}{l} \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{M} \\ z \mapsto f(z) \end{array} \right. \right\} \quad (7.134)$$

これはすなわち、標的空間 \mathcal{M} に埋め込まれた世界体積 \mathcal{X} 上のシグマ模型を考えていることに相当する。

Map(\mathcal{X}, \mathcal{M}) 上の基底 標的空間 \mathcal{M} の局所座標を Z^i とする。 Z^i によって埋め込み写像として超場 $Z^i(z)$ が定まる。超場 $Z^i(z)$ は写像空間 $\text{Map}(\mathcal{X}, \mathcal{M})$ 上の局所基底をなす。

Map(\mathcal{X}, \mathcal{M}) 上のベクトル場 \mathcal{M} 上のベクトル場 $X = X^i(Z) \frac{\partial}{\partial Z^i}$ は写像空間 $\text{Map}(\mathcal{X}, \mathcal{M})$ 上のベクトル場：

$$\mathbf{X} = \int_{\mathcal{X}} \mu(-1)^{d|X^i|} X^i(Z(z)) \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta Z^i(z)} \quad (7.135)$$

を誘導する。

\mathcal{X} 上の微分同相写像と \mathcal{M} 上の微分同相写像の直積 $\text{Diff}(\mathcal{X}) \times \text{Diff}(\mathcal{M})$ は写像空間 $\text{Map}(\mathcal{X}, \mathcal{M})$ に対して自然に作用するので、 \mathcal{X} 上の外微分 D と \mathcal{M} 上のベクトル場 Q はそれぞれ \hat{D} と \check{Q}

を $\text{Map}(\mathcal{X}, \mathcal{M})$ 上に誘導する．具体的に書き下すと，世界体積上の座標 $z \in \mathcal{X}$ ，埋め込み写像 $f \in \text{Map}(\mathcal{X}, \mathcal{M})$ に対して

$$\hat{D} = \int_{\mathcal{X}} \mu(z) \theta^\mu (\partial_\mu Z^i) \frac{\delta}{\delta Z^i(z)} \quad (7.136)$$

$$(7.137)$$

また， $Q = \{\Theta, -\} = Q^i \frac{\partial}{\partial Z^i}$ と成分表示すると

$$\check{Q} = \int_{\mathcal{X}} \mu(z) Q^i(Z) \frac{\delta}{\delta Z^i(z)} \quad (7.138)$$

である．

以下では世界体積 \mathcal{X} の標的空間 \mathcal{M} への埋め込み写像 $Z^i(z)$ に関連し，必要となる写像を定義する．

7.1.1 転入写像 $\mu_* \text{ev}^*$

本節では以下で重要となる写像を定義し，それらの組み合わせにより転入写像 $\mu_* \text{ev}^*$ を定義する．

評価写像 ev 任意の $z \in \mathcal{X}$ 及び $f \in \text{Map}(\mathcal{X}, \mathcal{M})$ に対して，評価写像

$\text{ev}: \mathcal{X} \times \text{Map}(\mathcal{X}, \mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{M}$ を次で定義する：

$$\begin{aligned} \mathcal{X} \times \text{Map}(\mathcal{X}, \mathcal{M}) &\rightarrow \mathcal{M} \\ \text{ev}: (z, f) &\mapsto f(z) \end{aligned} \quad (7.139)$$

チェイン写像 μ_* 次数付微分形式 ω ， \mathcal{X} 上のグラスマン積分 $\int_{\mathcal{X}} \mu$ に対して，次数付微分形式の空間に対するチェイン写像 μ_* を以下で定義する：

$$\begin{aligned} \Omega^\bullet(\mathcal{X} \times \text{Map}(\mathcal{X}, \mathcal{M})) &\rightarrow \Omega^\bullet(\text{Map}(\mathcal{X}, \mathcal{M})) \\ \mu_*: \omega(z, f) &\mapsto (\mu_* \omega)(f) = \int_{\mathcal{X}} \mu(z) \omega(z, f). \end{aligned} \quad (7.140)$$

ただし， $\mu(z)$ は $n+1$ 次元体積要素 $\times n+1$ 次元グラスマン積分測度である．これら二つの写像から構成される合成写像 $\mu_* \text{ev}^*$ は転入写像 (transgression map) と呼ばれる：

$$\mu_* \text{ev}^*: \Omega^\bullet(\mathcal{M}) \rightarrow \Omega^\bullet(\text{Map}(\mathcal{X}, \mathcal{M})) . \quad (7.141)$$

例として、ホモロジカル関数 $\Theta = \xi^i q_i$ は転入写像 $\mu_* ev^*$ により以下に移される：

$$\begin{aligned}\mu_* ev^* \Theta &= \mu_* ev^* \xi^i q_i \\ &= \int_{\mathcal{X}} \mu(z) \xi^i(z) q_i(z).\end{aligned}\tag{7.142}$$

また、次数 $n = 2$ の場合、写像空間 $\text{Map}(\mathcal{X}, \mathcal{M})$ 上の P 構造 ω は \mathcal{M} 上の P 構造 ω (3.40) を転入写像で写すことで次のように定義される：

$$\begin{aligned}\omega &:= \mu_* ev^* \omega \\ &= \int_{\mathcal{X}} \mu (\delta x^i \wedge \delta \xi_i + \delta q^i \wedge \delta p_i).\end{aligned}\tag{7.143}$$

ここで、 $\delta x^i, \delta \xi_i, \delta q^i, \delta p_i$ は $\Omega^\bullet(\text{Map}(\mathcal{X}, \mathcal{M}))$ の基底である．写像 $\mu_* ev^*$ は元の \mathcal{M} 上の ω の性質を保つため、 $\text{Map}(\mathcal{X}, \mathcal{M})$ 上の ω も非退化で閉形式である．この ω から定まる写像空間 $\text{Map}(\mathcal{X}, \mathcal{M})$ 上の次数付 Poisson ブラケットも同じ記号 $\{-, -\}$ で表記する．この $\text{Map}(\mathcal{X}, \mathcal{M})$ 上の次数付 Poisson ブラケット $\{-, -\}$ は BV 括弧 $\{-, -\}_{BV}$ もしくは通常の Poisson 括弧 $\{-, -\}_{PB}$ と等価であることを後に示す．

写像空間 $\text{Map}(\mathcal{X}, \mathcal{M})$ 上の内部積 写像空間上の微分形式 $\Omega^\bullet(\text{Map}(\mathcal{X}, \mathcal{M}))$ が定義されたので、対となる写像空間上の内部積を以下と定義する：

$$\iota_X = (-1)^{|X|} \int_{\mathcal{X}} \mu(z) (-1)^{d|X^a|} X^i(Z(z)) \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta(\delta Z^i(z))} \quad .\tag{7.144}$$

7.1.2 写像空間 $\text{Map}(\mathcal{X}, \mathcal{M})$ 上の次数付きシンプレクティック幾何学

本小節では転入写像 $\mu_* ev^*$ によって \mathcal{M} 上の構造から引き起こされる写像空間 $\text{Map}(\mathcal{X}, \mathcal{M})$ 上の構造を与える．これは写像空間 $\text{Map}(\mathcal{X}, \mathcal{M})$ 上に次数付きシンプレクティック幾何学を定める．写像空間の元は超場とみることができ、次数付きシンプレクティック幾何学は超場で書かれた場の理論の BV (Batalin-Vilkovisky) 形式を与えていることが分かる．

次数 n の QP 多様体 \mathcal{M} 上のシンプレクティック形式 $\omega = (-1)^{n|q|} \delta q^i \wedge \delta p_i$ に対応する写像空間 $\text{Map}(\mathcal{X}, \mathcal{M})$ 上のシンプレクティック形式 ω は

$$\omega = \int_{\mathcal{X}} \mu (-1)^{(d-1)|q|} \delta q^i(z) \wedge \delta p_i(z)\tag{7.145}$$

と定義する．シンプレクティック形式 ω の次数は $|\omega| = |\mu| + 1 + |\mathbf{q}^i| + 1 + |\mathbf{p}_i| = -d + 2 + n = -d + 2 + d - 1 = 1$ である．ただし $n = d - 1$ である．ここで，写像空間上 $\Omega^\bullet(\text{Map}(\mathcal{X}, \mathcal{M}))$ の外微分 δ を以下で定義する：

$$\delta = \mu_* \text{ev}^* d = \int_{\mathcal{X}} \mu (-1)^{d(|Z^i|+1)} (\delta Z^i)(z) \frac{\delta}{\delta Z^i(z)}. \quad (7.146)$$

関数 f に対する写像空間 $\text{Map}(\mathcal{X}, \mathcal{M})$ 上での外微分は

$$\delta f = \int_{\mathcal{X}} \mu (-1)^{d(|Z^i|+1)} (\delta Z^i)(z) \frac{\delta f}{\delta Z^i(z)} \quad (7.147)$$

となる．これより，シンプレクティック形式 ω から写像空間 $\text{Map}(\mathcal{X}, \mathcal{M})$ での Liouville 1 形式 ϑ は

$$\omega = -\delta \vartheta \quad (7.148)$$

として定まる．写像空間 $\text{Map}(\mathcal{X}, \mathcal{M})$ でのハミルトニアンベクトル場 X_f は

$$\iota_{X_f} \omega = -\delta f \quad (7.149)$$

として定める．このシンプレクティック形式 ω から得られる次数 1 の Poisson 括弧は Batalin-Vilkovisky 括弧 (以後 BV 括弧と呼ぶ) [37, 38, 39] と呼ばれ，以下で与えられる：

$$\{f, g\}_{BV} = X_f g \quad (7.150)$$

局所座標で計算すれば，以下の写像空間 $\text{Map}(\mathcal{X}, \mathcal{M})$ 上の BV 括弧の局所座標表示を得る．

$$\{f, g\}_{BV} = (-1)^{d-|q|} \int_{\mathcal{X}} \left[\frac{\overleftarrow{f} \delta}{\delta \mathbf{q}^i} \mu \frac{\overrightarrow{\delta} g}{\delta \mathbf{p}_i} + (-1)^{d(1+|q|)} \frac{\overleftarrow{f} \delta}{\delta \mathbf{p}_i} \mu \frac{\overrightarrow{\delta} g}{\delta \mathbf{q}^i} \right] \quad (7.151)$$

BV 括弧は以下の性質を満たすことが分かる：

$$\begin{aligned} \{f, g\}_{BV} &= -(-1)^{(|f|+1)(|g|+1)} \{g, f\}_{BV} \\ \{f, gh\}_{BV} &= \{f, g\}h + (-1)^{(|f|+1)|g|} g\{f, h\}_{BV} \\ \{f, \{g, h\}_{BV}\}_{BV} &= \{\{f, g\}_{BV}, h\}_{BV} + (-1)^{(|f|+1)(|g|+1)} \{g, \{f, h\}_{BV}\}_{BV} \end{aligned}$$

本節のポリアベクトル場，微分形式，演算子について，次数を列挙しておく：

- ベクトル場： $|\mathbf{X}| = -d + |X|$
- 内部積： $|\iota_{\mathbf{X}}| = -d + |X| - 1 = |\mathbf{X}| - 1 \quad (|\delta Z^i| = |Z^i| + 1)$

- シンプレクティック形式： $|\omega| = -d + 1 + |q^i| + 1 + |p_i| = 1 \quad (d = n + 1)$
- Poisson 括弧： $|\{-, -\}_{\text{PB}}| = -(|\omega| - 2) = -|\omega| + 2 = 1$
- 関数に対する全微分： $|\delta f| = -d + 1 + |f| + d = 1 + |f|$
- ハミルトニアンベクトル場： $|\mathbf{X}_f| = 1 + |f|$ であり $|\iota_{\mathbf{X}_f}| = |f|$

BFV 形式 $d = n$ のとき

7.1.3 シグマ模型の作用

AKSZ 構成では作用は写像空間 $\text{Map}(\mathcal{X}, \mathcal{M})$ 上のホモロジカル関数 (Q 構造) として与えられる. 作用 S は Liouville1 形式からなる部分と, 標的空間 \mathcal{M} のホモロジカル関数 Θ からなる二つの部分で構成される:

$$S = S_0 + S_1 \quad (7.152)$$

$$S_0 = \iota_{\hat{D}} \mu_* \text{ev}^* \vartheta \quad (7.153)$$

$$S_1 = \mu_* \text{ev}^* \Theta \quad (7.154)$$

ただし, \mathcal{M} 上のシンプレクティック形式 ω から, Liouville1 形式 ϑ は $\omega = -\delta\vartheta$ と与えられる.

例えば, H フラックスにより変形された Courant algebroid の場合は $\Theta = \Theta_H$ として, 以下のシグマ模型の作用が得られる:

$$S = S_0 + S_1 \quad (7.155)$$

$$= \iota_{\hat{D}} \mu_* \text{ev}^* \vartheta + \mu_* \text{ev}^* \Theta_H \quad (7.156)$$

$$= \int_{\mathcal{X}} \mu \left(-\xi_i d\mathbf{x}^i + \mathbf{p}_i d\mathbf{q}^i + \xi_i \mathbf{q}^i + \frac{1}{3!} H_{ijk}(\mathbf{x}) \mathbf{q}^i \mathbf{q}^j \mathbf{q}^k \right). \quad (7.157)$$

この作用は Courant シグマ模型と呼ばれる.

この AKSZ 構成法により定まる S が写像空間 $\text{Map}(\mathcal{X}, \mathcal{M})$ 上のホモロジカル関数であることは S_0, S_1 の定義及び各写像の性質より示すことが出来る. 記号として書けば, ホモロジカル関数 S は古典マスター方程式を満たす:

$$\{S, S\} = 0, \quad (7.158)$$

超多様体 \mathcal{M} の時と同様に、次数 1 のホモロジカルベクトル場 Q は $Q = \{S, -\}$ として定義する．古典マスター方程式より $Q^2 = 0$ であり、 Q は余境界作用素である．

上記の構成法により、写像空間 $\text{Map}(\mathcal{X}, \mathcal{M})$ は QP 多様体となり、この理論は AKSZ シグマ模型と呼ばれる．

以上のように $\text{Map}(T[1]X, \mathcal{M})$ 上の QP 構造は、全てのゴースト場と反場 (antifield) を含む位相的シグマ模型の Batalin-Vilkovisky 形式に等しく、写像空間 $\text{Map}(T[1]X, \mathcal{M})$ 上の Poisson 括弧は BV 括弧 $\{-, -\}_{BV}$ に等しくなる．

別の場合として、 X が n 次元多様体の場合、写像 $\text{Map}(\mathcal{X}, \mathcal{M})$ 上の P 構造は次数 2 のものとなる．

$$|\omega| = -d + (n + 2) = -n + (n + 2) = 2 \quad (7.159)$$

この場合は写像空間 $\text{Map}(T[1]X, \mathcal{M})$ 上の P 構造はハミルトニアン BFV 形式と等しく、写像空間 $\text{Map}(T[1]X, \mathcal{M})$ 上の Poisson 括弧は通常の場合の理論の Poisson 括弧 $\{-, -\}_{PB}$ と等しい．

7.2 境界のある膜に対する AKSZ シグマ模型

本節では境界のある AKSZ シグマ模型を考え、そのために特殊なクラスの正準変換が必要となる． \mathcal{M} を次数 n の QP 多様体としたとき、正準変換とは次数 n の任意の関数 $\alpha \in C^\infty(\mathcal{M})$, $f, g \in C^\infty(\mathcal{M})$ に対して、(5.83) $\{e^{\delta\alpha} f, e^{\delta\alpha} g\} = e^{\delta\alpha} \{f, g\}$ となる作用であった．

特に、標的空間 \mathcal{X} の部分空間であるラグランジアン部分多様体 \mathcal{L} と呼ばれるものに対する正準変換を考える．ラグランジアン部分多様体 \mathcal{L} とはシンプレクティック多様体 (M, ω) に対して定まる構造で以下 2 条件を満たすものである：

定義 7.1 (ラグランジアン部分多様体) 以下の 2 条件を満たす部分多様体 \mathcal{L} をラグランジアン部分多様体と呼ぶ：

1. 部分多様体 \mathcal{L} の次元は M の次元の半分である： $\dim(\mathcal{L}) = \frac{1}{2} \dim(M)$
2. シンプレクティック形式 ω の部分多様体 \mathcal{L} への制限が 0 となる： $\omega|_{\mathcal{L}} = 0$.

また、ラグランジアン部分多様体 \mathcal{L} への正準変換は以下で定義される：

定義 7.2 (ラグランジアン部分多様体 \mathcal{L} に対する正準変換)

$(\mathcal{M}, \omega, \Theta)$ を次数 n の QP 多様体、 \mathcal{L} を P 構造から定まるラグランジアン部分多様体、 α を次数

n の関数とする．このとき $e^{\delta\alpha}\Theta|_{\mathcal{L}} = 0$ が成り立つならば，作用 $e^{\delta\alpha}$ を「ラグランジアン部分多様体 \mathcal{L} に対する正準変換」，関数 α を「ラグランジアン部分多様体 \mathcal{L} に対する正準関数」と呼ぶ．ただし $|_{\mathcal{L}}$ は \mathcal{L} への制限を意味する．

この正準変換は標的空間の QP 構造を $(\mathcal{M}, \omega, \Theta)$ から $(\mathcal{M}, \omega, \Theta_\alpha)$ へと変える．正準変換であるからシンプレクティック構造（ P 構造）は変化せず，結果 S_0 は変わらず， S_1 のみが増える．変換後のホモロジカル関数 S' （ Q 構造）は

$$\begin{aligned} S' &= S_0 + S'_1 \\ &= \iota_{\hat{D}}\mu_*\mathrm{ev}^*\vartheta + \mu_*\mathrm{ev}^*e^{\delta\alpha}\Theta. \end{aligned} \quad (7.160)$$

となる． $\partial X = \emptyset$ の場合は $\{e^{\delta\alpha}\Theta, e^{\delta\alpha}\Theta\} = e^{\delta\alpha}\{\Theta, \Theta\} = 0$ であるから，新しい S' も古典マスター方程式 $\{S', S'\} = 0$ を満たす．一方 $\partial X \neq \emptyset$ の場合， S' が古典マスター方程式を満たすように境界条件が変更される．この場合，Stokes の定理より

$$\{S', S'\} = \iota_{\hat{D}}\mu_{\partial X*} (i_{\partial} \times \mathrm{id})^* \mathrm{ev}^*\vartheta + \mu_{\partial X*} (i_{\partial} \times \mathrm{id})^* \mathrm{ev}^*e^{\delta\alpha}\Theta \quad (7.161)$$

が得られる．ただし i_{∂} は包含写像 $i_{\partial}: \partial\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ ， $\mu_{\partial X*}$ は $\partial\mathcal{X}$ 上の境界上の積分，引き戻し $(i_{\partial} \times \mathrm{id})^*: \Omega^\bullet(\mathcal{X} \times \mathcal{M}) \rightarrow \Omega^\bullet(\partial\mathcal{X} \times \mathcal{M})$ はバルク（世界体積）の微分形式を境界上の微分形式へ移す写像である．さらに，以下の命題が存在する：

命題 7.3（境界上の古典マスター方程式） $(\mathcal{M}, \omega, \Theta)$ を次数 n の QP 多様体， \mathcal{L} を \mathcal{M} のラグランジアン部分多様体とする．世界体積の境界が存在し $\partial\mathcal{X} \neq \emptyset$ ， \mathcal{L} 上に埋め込まれている場合 $\partial\mathcal{X} \hookrightarrow \mathcal{L}$ を考える．このとき $e^{\delta\alpha}\Theta|_{\mathcal{L}} = 0$ ならば，AKSZ形式 (7.160) で定まる S' に対して，古典マスター方程式 $\{S', S'\} = 0$ が成り立つ．

この命題より境界のある場合の AKSZ シグマモデルの数学的構造は五つ組み $(\mathcal{M}, \omega, \Theta, \mathcal{L}, \alpha)$ によって記述される．

7.3 Poisson Courant algebroid に対する AKSZ シグマモデル

7.3.1 自明な境界を持つ AKSZ シグマモデル

本節では Poisson Courant algebroid から構成される AKSZ シグマモデルを構成する．

境界のある 3 次元多様体 X を考える．世界体積は超多様体 $\mathcal{X} = T[1]X$ である． \mathcal{X} の局所座標は (σ^μ, θ^μ) とする．ただし次数は $|\sigma^\mu| = 0, |\theta^\mu| = 1$ である．写像空間 $\text{Map}(\mathcal{X}, \mathcal{M})$ の元は世界体積 \mathcal{X} 上の座標を引数に取り，標的空間 \mathcal{M} の値を返す超場である．以後超場は太文字で書く．

写像空間 $\text{Map}(\mathcal{X}, T^*[2]T^*[1]M)$ 上の AKSZ 構成法はバルクの AKSZ シグマ模型を与える． $\text{Map}(\mathcal{X}, T^*[2]T^*[1]M)$ の基底は \mathcal{M} の基底 x^i, ξ_i, p_i, q_i を引き戻し写像 \mathbf{x}^* ($\mathbf{x} : \mathcal{X} \rightarrow M$) によってそれぞれ引き戻した超場 $\mathbf{x}^i(\sigma, \theta), \boldsymbol{\xi}_i(\sigma, \theta), \mathbf{p}_i(\sigma, \theta), \mathbf{q}^i(\sigma, \theta)$ である．

このとき，写像空間 $\text{Map}(\mathcal{X}, \mathcal{M})$ 上の P 構造は，転入写像 $\mu_* \text{ev}^*$ と標的空間の P 構造 $\omega = dx^i \wedge d\xi_i + dq^i \wedge dp_i$ から次に定まる：

$$\omega = \int_{\mathcal{X}} \mu (\delta \mathbf{x}^i \wedge \delta \boldsymbol{\xi}_i + \delta \mathbf{q}^i \wedge \delta \mathbf{p}_i). \quad (7.162)$$

$\alpha = 0$ の場合，作用 (Q 構造) は次の形となる：

$$S = \int_{\mathcal{X}} \mu \left(\boldsymbol{\xi}_i d\mathbf{x}^i - \mathbf{p}_i d\mathbf{q}^i + \pi^{ij}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\xi}_i \mathbf{p}_j - \frac{1}{2} \frac{\partial \pi^{jk}}{\partial x^i}(\mathbf{x}) \mathbf{q}^i \mathbf{p}_j \mathbf{p}_k + \frac{1}{3!} R^{ijk}(\mathbf{x}) \mathbf{p}_i \mathbf{p}_j \mathbf{p}_k \right) \quad (7.163)$$

(7.163) のことを Poisson Courant シグマ模型もしくは双対 Courant シグマ模型と呼ぶ．この作用 S の変分をとると，

$$\begin{aligned} \delta S = \int_{\mathcal{X}} \mu & \left(\delta \boldsymbol{\xi}_i d\mathbf{x}^i + \boldsymbol{\xi}_i d\delta \mathbf{x}^i - \delta \mathbf{p}_i d\mathbf{q}^i - \mathbf{p}_i d\delta \mathbf{q}^i \right. \\ & \left. + \delta \left(\pi^{ij}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\xi}_i \mathbf{p}_j - \frac{1}{2} \frac{\partial \pi^{jk}}{\partial x^i}(\mathbf{x}) \mathbf{q}^i \mathbf{p}_j \mathbf{p}_k + \frac{1}{3!} R^{ijk}(\mathbf{x}) \mathbf{p}_i \mathbf{p}_j \mathbf{p}_k \right) \right). \end{aligned} \quad (7.164)$$

が得られる．この変分により運動方程式を求めることが出来る．運動方程式を求める際に (7.164) の第二項および第四項について部分積分を行うと，以下の境界項

$$\delta S|_{\partial \mathcal{X}} = \int_{\partial \mathcal{X}} \mu_{\partial \mathcal{X}} (\boldsymbol{\xi}_i \delta \mathbf{x}^i + \mathbf{p}_i \delta \mathbf{q}^i)|_{\partial \mathcal{X}}, \quad (7.165)$$

が現れる．運動方程式が定まるために，この境界項が消える条件 (7.165) = 0 を要請すると境界条件が定まる．仮に Liouville 1 形式が境界上で $\text{ev}^* \vartheta = 0$ であれば， $\delta S|_{\partial \mathcal{X}} = 0$ が成り立つため，境界 $\partial \mathcal{X}$ がラグランジアン部分多様体 \mathcal{L} 内の $\text{ev}^* \vartheta = 0$ を満たす部分多様体内にあることは， $\delta S|_{\partial \mathcal{X}} = 0$ が成り立つための十分条件であり，以下ではこの境界条件：

$$\partial \mathcal{X} \hookrightarrow \mathcal{L}_{\vartheta} \quad (7.166)$$

を要請する．ただし, $\mathcal{L}_\vartheta = \mathcal{L} \cap \{\text{ev}^*\vartheta = 0\} \subset \mathcal{M}$ である．

この境界条件と同時に, AKSZ形式として無矛盾となるためには写像空間 $\text{Map}(\mathcal{X}, T^*[2]T^*[1]M)$ 上の古典マスター方程式 $\{S, S\}_{BV} = 0$ を満たす必要がある．古典マスター方程式を計算すれば次が得られる：

$$\{S, S\}_{BV} = \int_{\partial\mathcal{X}} \mu_{\partial\mathcal{X}} \left(\xi_i d\mathbf{x}^i - \mathbf{p}_i d\mathbf{q}^i + \pi^{ij}(\mathbf{x}) \xi_i \mathbf{p}_j - \frac{1}{2} \frac{\partial \pi^{jk}}{\partial x^i}(\mathbf{x}) \mathbf{q}^i \mathbf{p}_j \mathbf{p}_k + \frac{1}{3!} R^{ijk}(\mathbf{x}) \mathbf{p}_i \mathbf{p}_j \mathbf{p}_k \right) \Big|_{\partial\mathcal{X}} \quad (7.167)$$

ここで, 先の境界条件 $\xi_i|_{\partial\mathcal{X}} = 0$ かつ $\mathbf{p}_i|_{\partial\mathcal{X}} = 0$ を課すと, 境界項 (7.165) は消え, 古典マスター方程式 $\{S, S\}_{BV} = 0$ も満たされる．すなわち標的空間の言葉で書けば

$$\xi_i = p_i = 0 \quad (7.168)$$

は一つの境界条件であり, これを自明な境界条件と呼ぶ．この境界条件によって定まる部分空間は $TM \oplus T^*M$ 上の Poisson Courant algebroid の Dirac 構造 [17] T^*M に対応する．

7.3.2 正準関数により非自明な境界を持つ AKSZ シグマ模型

次により非自明な境界を持つ AKSZ シグマ模型, 特に Q 構造が正準関数 $\alpha = \frac{1}{2} B_{ij}(\mathbf{x}) q^i q^j$ によって変更されている場合を考える．

まず, 正準変換によって境界条件を変更する一般的な手法を導入する． $\{\alpha, \alpha\} = 0$ なる特別な場合について, (7.160) 式の変換で得られた S' に対し, 写像空間上で正準変換 $e^{-\delta_{\hat{\alpha}}}$ を施し, S'' を求める．ただし, $\hat{\alpha} = \mu_* \text{ev}^* \alpha$ である：

$$\begin{aligned} S'' &= e^{-\delta_{\hat{\alpha}}} S' \\ &= S_0 - \{S_0, \hat{\alpha}\} + \mu_* \text{ev}^* \Theta \\ &= S_0 - \mathcal{L}_{\hat{D}} \mu_* \text{ev}^* \alpha + \mu_* \text{ev}^* \Theta \\ &= S - \mu_{\partial\mathcal{X}*} (i_{\partial} \times \text{id})^* \text{ev}^* \alpha \end{aligned} \quad (7.169)$$

ここで, $\{\alpha, \alpha\} = 0$ のため, 正準変換は $e^{-\delta_{\hat{\alpha}}} S_0 = S_0 - \{S_0, \hat{\alpha}\}$ と第二項で止まる． $\{S_0, \hat{\alpha}\}$ は境界項 $S_{\partial\mathcal{X}} = -\mu_{\partial\mathcal{X}*} (i_{\partial} \times \text{id})^* \text{ev}^* \alpha$ を生成する． S' がマスター方程式を満たすため, その正準変換である S'' もマスター方程式 $\{S'', S''\} = 0$ を満たす．

従って正準関数 α を用いて作用 S を標的空間で正準変換し, 写像空間で逆の正準変換を行うと, 作用には境界項 $S_{\partial\mathcal{X}} = -\mu_{\partial\mathcal{X}*} (i_{\partial} \times \text{id})^* \text{ev}^* \alpha$ が加わり, 新たな AKSZ シグマ模型となる．

以下では $\alpha = -\frac{1}{2}B_{ij}(x)q^i q^j$ の場合を考える. B_{ij} は弦理論に零モードとして現れる Kalb–Ramond 2 形式場 $B = \frac{1}{2}B_{ij}(x)dx^i \wedge dx^j$ 由来である. この α により変更された S'' は以下になる:

$$S'' = \int_{\mathcal{X}} \mu \left(\xi_i d\mathbf{x}^i - \mathbf{p}_i d\mathbf{q}^i + \pi^{ij}(\mathbf{x}) \xi_i \mathbf{p}_j - \frac{1}{2} \frac{\partial \pi^{jk}}{\partial x^i}(\mathbf{x}) \mathbf{q}^i \mathbf{p}_j \mathbf{p}_k + \frac{1}{3!} R^{ijk}(\mathbf{x}) \mathbf{p}_i \mathbf{p}_j \mathbf{p}_k \right) + \int_{\partial \mathcal{X}} \mu_{\partial \mathcal{X}} \frac{1}{2} B_{ij}(\mathbf{x}) \mathbf{q}^i \mathbf{q}^j, \quad (7.170)$$

この S'' を変分し, 運動方程式を求める. その際に現れる境界項は次である:

$$\delta S''|_{\partial \mathcal{X}} = \int_{\mathcal{X}} \mu d(-\xi_i \delta \mathbf{x}^i - \mathbf{p}_i \delta \mathbf{q}^i) - \int_{\partial \mathcal{X}} \mu_{\partial \mathcal{X}} B_{ij}(\mathbf{x}) (\delta \mathbf{q}^i) \mathbf{q}^j \quad (7.171)$$

$$= \int_{\partial \mathcal{X}} \mu_{\partial \mathcal{X}} \left[\left(-\xi_i - \frac{1}{2} \frac{\partial B_{ij}(\mathbf{x})}{\partial x^i} \mathbf{q}^i \mathbf{q}^j \right) \delta \mathbf{x}^i + (-\mathbf{p}_i + B_{ij}(\mathbf{x}) \mathbf{q}^j) \delta \mathbf{q}^i \right]. \quad (7.172)$$

写像空間 $\text{Map}(\mathcal{X}, T^*[2]T^*[1]M)$ 上の外微分 d について部分積分する際に d が \mathbf{p}_i を飛び越えるときに符号が出ることに注意する. (7.172) より以下の境界条件:

$$\xi_i|_{\partial \mathcal{X}} = -\frac{1}{2} \frac{\partial B_{jk}(\mathbf{x})}{\partial x^i} \mathbf{q}^j \mathbf{q}^k|_{\partial \mathcal{X}}, \quad \mathbf{p}_i|_{\partial \mathcal{X}} = B_{ij}(\mathbf{x}) \mathbf{q}^j|_{\partial \mathcal{X}}. \quad (7.173)$$

は $\delta S''|_{\partial \mathcal{X}} = 0$ を満たす. 加えて古典マスター方程式 $\{S'', S''\}_{BV} = 0$ からは次の境界条件が出る:

$$\{S'', S''\}_{BV} = \int_{\partial \mathcal{X}} \mu_{\partial \mathcal{X}} \left(\pi^{ij}(\mathbf{x}) \xi_i \mathbf{p}_j - \frac{1}{2} \frac{\partial \pi^{jk}}{\partial x^i}(\mathbf{x}) \mathbf{q}^i \mathbf{p}_j \mathbf{p}_k + \frac{1}{3!} R^{ijk}(\mathbf{x}) \mathbf{p}_i \mathbf{p}_j \mathbf{p}_k \right) = 0.$$

$$\left(\pi^{ij}(\mathbf{x}) \xi_i \mathbf{p}_j - \frac{1}{2} \frac{\partial \pi^{jk}}{\partial x^i}(\mathbf{x}) \mathbf{q}^i \mathbf{p}_j \mathbf{p}_k + \frac{1}{3!} R^{ijk}(\mathbf{x}) \mathbf{p}_i \mathbf{p}_j \mathbf{p}_k \right) \Big|_{\partial \mathcal{X}} = 0. \quad (7.174)$$

(7.173) 式の境界条件は (7.174) マスター方程式 $\{S'', S''\} = 0$ も同時に満たす.

自明な境界の場合と同様に, (7.173), (7.174) を標的空間の言葉で書き直すと以下になる:

以下の条件

$$\mathcal{L}'_{\vartheta} : \quad \xi_i|_{\partial \mathcal{X}} = -\frac{1}{2} \frac{\partial B_{jk}(x)}{\partial x^i} q^j q^k, \quad p_i|_{\partial \mathcal{X}} = B_{ij}(x) q^j \quad (7.175)$$

で定義されるラグランジアン部分多様体 \mathcal{L}'_{ϑ} 上で

$$\Theta = \pi^{ij}(x) \xi_i p_j - \frac{1}{2} \frac{\partial \pi^{jk}}{\partial x^i}(x) q^i p_j p_k + \frac{1}{3!} R^{ijk}(x) p_i p_j p_k = 0 \quad (7.176)$$

が成り立つ.

(7.175) を (7.176) に代入すると次を得る：

$$\Theta = \pi^{ij}(x)\xi_i p_j - \frac{1}{2} \frac{\partial \pi^{jk}}{\partial x^i}(x) q^i p_j p_k + \frac{1}{3!} R^{ijk}(x) p_i p_j p_k \quad (7.177)$$

$$= \left(-\frac{1}{2} \pi^{lm} \frac{\partial B_{ij}}{\partial x^l} B_{mk} - \frac{1}{2} \frac{\partial \pi^{lm}}{\partial x^i} B_{jl} B_{km} - \frac{1}{3!} R^{lmn} B_{il} B_{jm} B_{kn} \right) q^i q^j q^k = 0. \quad (7.178)$$

1. $B = \pi^{-1}$ のとき

(7.178) は

$$H = dB = \wedge^3 B^b R \quad (7.179)$$

を意味する.

2. $B \neq \pi^{-1}$ のとき

Poisson Courant algebroid の Dorfman 括弧は Koszul 括弧 $[-, -]_\pi$ であり, QP 多様体の手法では Koszul 括弧は $\Theta_{R=0} = \pi^{ij} \xi_i p_j - \frac{1}{2} (\partial_i \pi^{jk}) q^i p_j p_k$ に対する導来括弧と一致する. したがって, 導来括弧を用いて Koszul 括弧 $[B, B]_\pi$ を計算すると以下となる：

$$\begin{aligned} [B, B]_\pi &= \left[\frac{1}{2} B_{ij} q^i q^j, \frac{1}{2} B_{lm} q^l q^m \right]_\pi \\ &= \left\{ \left\{ \frac{1}{2} B_{ij} q^i q^j, \pi^{ij} \xi_i p_j - \frac{1}{2} \frac{\partial \pi^{jk}}{\partial x^i} q^i p_j p_k \right\}, \frac{1}{2} B_{lm} q^l q^m \right\} \\ &= \left(\pi^{lm} \frac{\partial B_{ij}}{\partial x^l} B_{mk} + \frac{\partial \pi^{lm}}{\partial x^i} B_{jl} B_{km} \right) q^i q^j q^k \end{aligned} \quad (7.180)$$

(7.178) は Koszul 括弧を使って $[B, B]_\pi = -2 \wedge^3 B^b R$ と書き直せる. ただし, 準同型写像 $B^b : TM \rightarrow T^*M$ は $B^b(X) = B^b(X^i \frac{\partial}{\partial x^i}) = B_{ij} X^i \frac{\partial}{\partial x^j}$ で定義される. ただしベクトル場 $X = X^i(x) \partial / \partial x^i$ である. B 場の Koszul 括弧による交換子が 3 ベクトル場 R により変形されている.

7.3.3 境界上に現れる位相的弦理論

これまで境界のある膜の世界体積に現れる AKSZ シグマ模型を議論してきた. 本節では膜の境界の作る世界面にどのような理論が現れるのかを調べる. 以下ではポアソン構造 π が非退化な場合を考える. このとき, π^{-1} はシンプレクティック構造である.

作用 (7.170) を変分すると ξ_i についての運動方程式 $p_i = \pi_{ij}^{-1} dx^j$ が得られる．これを作用 (7.170) に代入し Stokes の定理を用いることで次の $T[1]\partial X$ 上の境界作用を得る：

$$S = \int_{\partial X} \mu_{\partial X} \left(\pi_{ij}^{-1} q^i dx^j - \frac{1}{2} B_{ij}(x) q^i q^j \right) + \int_X \mu \frac{1}{3!} R^{ijk}(x) \pi_{il}^{-1} \pi_{jm}^{-1} \pi_{kn}^{-1} dx^l dx^m dx^n. \quad (7.181)$$

ここで $\pi^{-1} \in \Gamma(\wedge^2 T^*X)$ はシンプレクティック構造であるから $d(\pi^{-1}) = 0$ を用いた．この AKSZ シグマ模型の作用 (7.181) は第 1 項が 2 次元世界面上の積分であり，第 2 項は WZ 項である．これは先行研究 [40, 41, 42] にて議論されている Poisson シグマ模型に WZ 項 [43] が加わったものである．

この作用 (7.181) はゴースト場を含んでいる．以下，ゴースト場を取り除き物理的な作用を求める．まず各超場を局所座標 θ^μ に対して級数展開する：

$$\Phi(\sigma, \theta) = \Phi^{(0)}(\sigma) + \Phi_\mu^{(1)}(\sigma) \theta^\mu + \frac{1}{2} \Phi_{\mu\nu}^{(2)}(\sigma) \theta^\mu \theta^\nu. \quad (7.182)$$

θ^μ は反対称なため，級数展開は有限項で止まる．この展開した各超場を作用 (7.181) に代入し，作用を成分表示する．次に θ^μ 方向について積分を実行し，非零の次数を持つゴースト場を零におく．残る次数零の場のみで書かれた作用は物理的な作用となる：

$$S = - \int_{\partial X} \left(\pi_{ij}^{-1} q^i \wedge dx^j + \frac{1}{2} B_{ij}(x) q^i \wedge q^j \right) + \int_X \frac{1}{3!} R^{ijk}(x) \pi_{il}^{-1} \pi_{jm}^{-1} \pi_{kn}^{-1} dx^l \wedge dx^m \wedge dx^n. \quad (7.183)$$

ただし $x^i = x^{(0)i}$, $q^i = q_\mu^{(1)i} d\sigma^\mu$ である．この境界上の 2 次元 AKSZ 作用は位相的ではあるが R フラックス を数学的に無矛盾に含んだ弦理論の作用となっている．

上でも述べたとおり (7.183) は 2 次元の位相的作用であり，運動項を含まない．この作用に運動項を手で加えることで R フラックス を含む弦理論のダイナミカルな作用を書くことが出来る：

$$S = \frac{1}{2} \int_{\partial X} G_{ij}(x) dx^i \wedge *dx^j - \int_{\partial X} \left(\pi_{ij}^{-1} q^i \wedge dx^j + \frac{1}{2} B_{ij}(x) q^i \wedge q^j \right) + \int_X \frac{1}{3!} R^{ijk}(x) \pi_{il}^{-1} \pi_{jm}^{-1} \pi_{kn}^{-1} dx^l \wedge dx^m \wedge dx^n. \quad (7.184)$$

ただし，運動項を手で加えたことによりこの作用 (7.184) は AKSZ 構成方法からは外れたものとなっている．

7.4 AKSZ シグマ模型間の双対性

5 章にて標準的 Courant algebroid と Poisson Courant algebroid の間の双対性について議論した．本節ではそれぞれの algebroid に対応する AKSZ シグマ模型の双対性を議論する．シグマ模型間の双対性を調べるため，5 章で議論した algebroid レベルの双対変換を，シグマ模型のレベルに引き上げる．以下では境界のある三次元多様体 X に対する AKSZ 構成法により二つの異なる Courant シグマ模型を導く．一つは前節で構成した R フラックスの入った Poisson Courant algebroid の構造を持つ Courant シグマ模型であり，もう一つは H フラックスの入った標準的 Courant algebroid の構造を持つ Courant シグマ模型である．

Poisson Courant algebroid のシグマ模型の作用は (7.163) であり， H フラックスにより変形された Courant algebroid のシグマ模型の作用は (7.157) である．フラックス双対性変換で用いた (5.87) $\Theta_R = e^{-\delta_{\alpha q}} e^{\delta_{\alpha p}} e^{-\delta_{\alpha q}} \Theta_H$ から推測して， $\alpha = \frac{1}{2} \pi^{ij}(x) p_i p_j - \frac{1}{2} \pi_{ij}^{-1} q^i q^j$ とおく．この α はラグランジアン部分多様体 \mathcal{L} に対する正準関数 $e^{\delta_{\alpha}} \Theta_H|_{\mathcal{L}} = 0$ であり $\{\alpha, \alpha\} = 0$ も満たす．

証明

$$\begin{aligned}
 \{\alpha, \alpha\} &= \left\{ \frac{1}{2} \pi^{ij}(x) p_i p_j - \frac{1}{2} \pi_{ij}^{-1} q^i q^j, \frac{1}{2} \pi^{lm}(x) p_l p_m - \frac{1}{2} \pi_{lm}^{-1} q^l q^m \right\} \\
 &= \pi^{ij} p_i \left(-\pi_{jm}^{-1} q^m \right) + \left(-\pi_{ij}^{-1} q^i \right) \pi^{jm} p_m \\
 &= -p_i q^i - q^i p_i \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{7.185}$$

この α により (7.169) の変換を行えば以下を得る：

$$\begin{aligned}
 S''' &= \int_{\mathcal{X}} \mu \left(-\xi_i d\mathbf{x}^i + \mathbf{p}_i d\mathbf{q}^i + \xi_i \mathbf{q}^i + \frac{1}{3!} H_{ijk}(\mathbf{x}) \mathbf{q}^i \mathbf{q}^j \mathbf{q}^k \right) \\
 &\quad - \int_{\partial \mathcal{X}} \mu_{\partial \mathcal{X}} \left(\frac{1}{2} \pi^{ij}(\mathbf{x}) \mathbf{p}_i \mathbf{p}_j + \frac{1}{2} \pi_{ij}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{q}^i \mathbf{q}^j \right).
 \end{aligned} \tag{7.186}$$

これは先の作用 (7.170) に α を写像空間上に引き戻した境界項を加えたものになっており，非自明な境界のある Courant シグマ模型である．転入写像 μ_{*ev}^* と正準関数による正準変換は順序を入れ替えられるため，ここで得た作用 (7.186) は R フラックスの入った Poisson Courant シグマ模型の作用 (7.163) と同値であることが分かる．

また，シグマ模型の場を再定義することにより，この同値性を示すことも出来る．境界項は Stokes の定理により $\int_{\mathcal{X}} \mu_{\mathcal{X}} d \left(\frac{1}{2} \pi^{ij}(\mathbf{x}) \mathbf{p}_i \mathbf{p}_j + \frac{1}{2} \pi_{ij}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{q}^i \mathbf{q}^j \right)$ と書ける．各超場を以下によつ

て再定義する：

$$\begin{aligned}
x^i &\rightarrow x^i, \\
q^i &\rightarrow \pi^{ij}(x)p_j, \\
p_i &\rightarrow p_i + \pi_{ij}^{-1}(x)q^j, \\
\xi_i &\rightarrow \xi_i - \frac{1}{2} \frac{\partial \pi^{jk}}{\partial x^i}(x) p_j p_k - \frac{\partial \pi^{jk}}{\partial x^i} \pi_{kl}^{-1}(x) p_j q^l.
\end{aligned}$$

この再定義を (7.186) へ代入すると R フラックス の入った Poisson Courant シグマ模型の作用 (7.163) が得られる．

5 節で得られたフラックス間の関係 $R = \wedge^3 \pi^* H$ がここでも再び得られる．作用 (7.170) では自明な境界条件であったが，作用 (7.186) では非自明な境界条件を取ることになる．以上のことから，フラックス双対変換は境界条件の変更，すなわちラグランジアン部分多様体 \mathcal{L} の取り替えに対応していることが分かる．

8 ハミルトン形式による解析

これまで、境界のある膜に対する 3 次元 AKSZ シグマ模型の境界に、2 次元シグマ模型が現れることをみた。2 次元シグマ模型の場の配位空間は境界上に制限されているが、その場から作られるカレントは元の標的空間の対称性を引き継ぎ、Alekseev-Strobl 型カレント代数 [44, 45, 46, 47] として現れることを本章では示す。この Alekseev-Strobl 型カレント代数には Courant algebroid もしくは Poisson Courant algebroid の構造が現れ、対応したフラックスを含む位相的理論の対称性の構造を与えている。

8.1 ハミルトン形式への拡張

前章ではラグランジアン形式にて、3 次元トポロジカルシグマ模型の境界に、境界の取り方によって異なる 2 次元シグマ模型が現れることを見た。本節ではハミルトニアン形式に応用し、1 次元高い理論から境界上のハミルトニアン形式を導出した場合を調べる。特に、標的空間の 3 フラックスを境界上の Poisson 括弧に反映させる方法を見る。応用として、Alekseev-Strobl 型カレント代数を構成する。

8.1.1 導来括弧から導かれる境界上の Poisson 括弧

以下では時間方向 \mathbb{R} を特別扱いした $n+1$ 次元世界体積 $X = \Sigma \times \mathbb{R}$ を考える。超空間へ埋め込む場合、世界体積 X の空間方向 Σ を超空間 $\Sigma = T[1]\Sigma$ に置き換え、それが標的空間 \mathcal{M} へ埋め込まれている状況を考える。標的空間である超空間 \mathcal{M} 上に次数 n の P 構造が存在する場合、標的空間に Poisson 括弧が自然に定まる (定義 3.1)。ただし、 n はシンプレクティック構造 ω のゴースト数 (次数) である。ここから境界上の自然な Poisson 括弧を導くことが出来るが⁴、本研究では Q 構造、すなわち Θ の幾何学情報を境界理論の Poisson 括弧に組み込むことを考える。これは導来括弧を使って同時刻面 $\partial\Sigma$ 上のハミルトン形式に移ることで実現される。

⁴ハミルトニアン形式に移るため、同一時刻面上で考える。空間方向の超多様体 Σ が n 次元であるため、 μ 積分は次数 $-n$ を持つ。したがって、引き戻しによって定まる写像空間上の次数付きシンプレクティック構造 $\omega = \mu_* \text{ev}^* \omega$ は全次数が 2 になる。結果、この ω により構成される次数付き Poisson 括弧は次数 0 で、通常の Poisson 括弧 $\{-, -\}_{PB}$ と同じになる。しかし、この方法で構成される Poisson 括弧は、標的空間の幾何学情報 Θ を反映しておらず、フラックスを含まない。[44] ではこの問題を解消するため、シンプレクティック構造に B 変換を施し H フラックスを組み込んでいた。

AKSZ 構成と同様に標的空間に対応した超空間である次数 n の QP 多様体 $(\mathcal{M}, \omega, \Theta)$ を考える．ハミルトニアン形式を考える場合には，標的空間に埋め込まれている部分空間であるラグランジアン部分多様体 \mathcal{L} が，境界 $\partial\Sigma$ を含んでおり，境界の埋め込み座標が力学的自由度となる．膜の境界は閉弦に対応するため，この埋め込み座標は標的空間上の閉弦の運動を記述する．

導来括弧 $\{-, \Theta\}, -$ を用いて，ラグランジアン部分多様体 \mathcal{L} 上の Poisson 括弧を次のように定義する：

定義 8.1 (ラグランジアン部分多様体 \mathcal{L} 上の Poisson 括弧) $(\mathcal{M}, \omega, \Theta)$ を QP 多様体， ω に対するラグランジアン部分多様体を \mathcal{L} ， $pr : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{L}$ を自然な写像とする．このとき，導来括弧を \mathcal{L} 上に制限したものを \mathcal{L} 上の次数付き Poisson 括弧とする．

$$\{f, g\}_{\mathcal{L}} \equiv \{\{pr^*f, \Theta\}, pr^*g\} \Big|_{\mathcal{L}} \quad (8.187)$$

ただし， f, g は \mathcal{L} 上で定義された関数とする．

この境界上の Poisson 括弧 $\{-, -\}_{\mathcal{L}}$ は次数 $-n + 1$ で，反対称で Leibniz 則と Jacobi 恒等式を満たす．

証明

$$|\Theta| = n + 1, \quad | \{-, -\} | = -n \quad (8.188)$$

であるため， $| \{-, -\}_{\mathcal{L}} | = | \{\{pr^*- , \Theta\}, pr^*- \} \Big|_{\mathcal{L}} | = (n + 1) - 2n = -n + 1$ である．ラグランジアン部分多様体 \mathcal{L} 上ではシンプレクティック形式が消える $\omega|_{\mathcal{L}} = 0$ ため， \mathcal{L} 上の関数 f, g に対して $\{pr^*f, pr^*g\} = 0$ である．このことから，自動的に Leibniz 則及び Jacobi 恒等式が成り立つ．

定義 8.1 で定義されたラグランジアン部分多様体 \mathcal{L} 上の Poisson 括弧を部分写像空間 $\text{Map}(\partial\Sigma, \mathcal{L})$ 上へ持ち上げる．ただし， $\Sigma = T[1]\Sigma$ である． $\mu_* \text{ev}^* \Theta = S_1$ であるため，写像空間 $\text{Map}(\partial\Sigma, \mathcal{L})$ 上の Poisson 括弧は以下のように定義出来る：

定義 8.2 (写像空間 $\text{Map}(\partial\Sigma, \mathcal{L})$ 上の Poisson 括弧) 部分写像空間 $\text{Map}(\partial\Sigma, \mathcal{L})$ 上の Poisson 括弧を写像空間 $\text{Map}(\partial\Sigma, \mathcal{M})$ 上の導来括弧により以下と定義する：

$$\{F, G\}_{PB} = \{\{\hat{pr}^*F, S_1\}, \hat{pr}^*G\} \Big|_{\hat{\mathcal{L}}} . \quad (8.189)$$

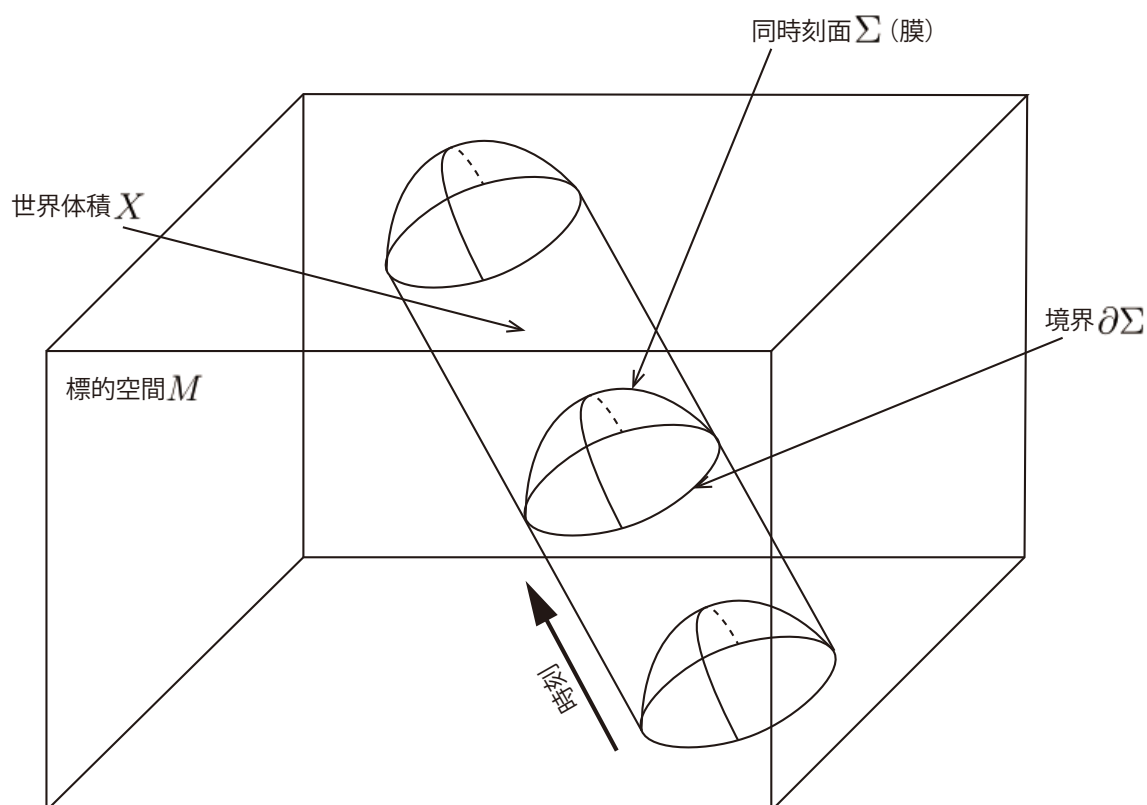


図 2: $n = 2$ の場合に標的空間 M を運動する膜 Σ の作る世界体積 X の図である．膜の境界は $\partial\Sigma$ である．ハミルトニアン形式では M, Σ がそれぞれ超空間 \mathcal{M}, Σ へ拡張される．超空間では $\partial\Sigma$ は超空間 \mathcal{M} の部分空間であるラグランジアン部分多様体 \mathcal{L} に埋め込まれている． \mathcal{L} は超空間上で定義されるため，本図には描かれていない．

ただし, $F, G \in \widehat{\mathcal{L}} = \text{Map}(\partial\Sigma, \mathcal{L})$ であり

$$S_1 = \int_{\partial\Sigma} \mu_{\partial\Sigma}(z) \Theta(Z(z)) \quad (8.190)$$

である. また, 写像 $pr : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{L}$ を写像空間に引き上げた写像 $\widehat{pr} : \text{Map}(\partial\Sigma, \mathcal{M}) \rightarrow \widehat{\mathcal{L}}$ を用いた. この写像空間上の *Poisson* 括弧は次数 0 である.

証明 境界 $\partial\Sigma$ は $n - 1$ 次元多様体であるため, $|S_1| = |\mu_* \text{ev}^* \Theta| = (n - 1) + (n + 1) = 2$ である. 写像空間 \mathcal{M} 上のシンプレクティック形式 $\omega = \mu_* \text{ev}^* \omega$ はゴースト数 $n - (n - 1) = 1$ であり, \mathcal{M} 上の *Poisson* 括弧は次数 -1 である. 従って, 写像空間 $\widehat{\mathcal{L}}$ 上の *Poisson* 括弧は次数 $2 - 1 - 1 = 0$ である.

8.1.2 導来括弧による *Poisson* 括弧の導出

以下では具体的な例に基づき, 導来括弧による写像空間 $\text{Map}(\partial\Sigma, \mathcal{L})$ 上の *Poisson* 括弧の導出を行う. $n = 2$ の場合を考える. この場合, AKSZ シグマ模型は膜の運動によって作られる世界体積の理論となる. 世界体積 X の同一時刻平面 Σ の境界 $\partial\Sigma$ は閉曲線 S^1 である. 境界 $\partial\Sigma$ の埋め込み写像はループ空間 $LM = \text{Map}(S^1, M)$ である. ハミルトニアン形式を構成するには, 余接束 $T^*LM = \text{Map}(S^1, T^*M)$ を相空間として考える. 底空間の局所座標を $x^i(\sigma)$, ファイバー上の局所座標を $p_i(\sigma)$ とする. ただし σ は S^1 方向のパラメーターである.

写像空間に持ち上げるために $\partial\Sigma = T[1]S^1$ 上のハミルトニアン形式を考え, ループ空間に対応する写像空間 $\text{Map}(\partial\Sigma, \mathcal{L})$ 上に *Poisson* 括弧を構成する. 標的空間 \mathcal{M} 上の写像空間 $\text{Map}(\partial\Sigma, \mathcal{M})$ に導来括弧を定義し, それをループ空間に対応する写像空間 $\widehat{\mathcal{L}}_\vartheta$ へ制限することで *Poisson* 括弧を構成する.

まず, 第 3 章で議論した標準的 Courant algebroid の QP 多様体 $\mathcal{M} = T^*[2]T[1]M$ を考える. \mathcal{M} の局所 Darboux 座標として (x^i, p_i, q^i, ξ_i) をとる. それぞれの次数は $(0, 1, 1, 2)$ である. 正準次数付きシンプレクティック構造は

$$\omega = \delta\vartheta \quad (8.191)$$

$$= \delta(x^i \delta\xi_i + p_i \delta q^i) \quad (8.192)$$

$$= \delta x^i \wedge \delta\xi_i + \delta p_i \wedge \delta q^i \quad (8.193)$$

と表現される. ω に対する正準ラグランジアン部分多様体かつ $\vartheta = 0$ なる部分空間を $\mathcal{L}_\vartheta = \{(x^i, p_i) \mid \xi_i = q^i = 0\}$ ととる.

最も簡単な Q 構造として $\Theta = \xi_i q^i$ を考えると、 \mathcal{M} 上の導来括弧が (x^i, p_i, q^i, ξ_i) の自分を含む任意のペアの間に定義される。そのようにして定義された導来括弧は、一般に引数に対して対象/反対称いずれの場合もありえる。 Θ の具体形から、非零の値を持ちうるのは明らかに (x^i, p_i) のペアだけである。そのような \mathcal{M} 上の導来括弧を \mathcal{L}_Θ 上に制限すると、以下の関係が得られる：

$$\{\{x^i, \Theta\}, x^j\} = 0, \quad (8.194)$$

$$\{\{x^i, \Theta\}, p_j\} = -\{\{p_j, \Theta\}, x^i\} = \delta^i_j \quad (8.195)$$

$$\{\{p_i, \Theta\}, p_j\} = 0 \quad (8.196)$$

(8.215) の反対称性は $|\Theta| = 3, |p_j| = 1$ である事から従う。これは p の次数が 1 である事を除いては、 T^*M 上の標準的な Poisson 括弧と同じ形になっている。

次にこれを写像空間に持ち上げることで、超場についての Poisson 括弧が定義出来ることを見る。超多様体 $\partial\Sigma = T[1]S^1$ を考え、局所座標を (σ, θ) とする。標的空間 \mathcal{M} の基底を転入写像で持ち上げることで、写像空間 $\text{Map}(\partial\Sigma, \mathcal{M})$ 上の基底である超場が次のように得られる：

$$\mathbf{x}^i(\sigma, \theta) \in \text{Map}(\partial\Sigma, M) \quad \text{次数 } 0 \quad (8.197)$$

$$\mathbf{q}^i(\sigma, \theta) \in \text{Map}(\partial\Sigma, T_x[1]M) \quad \text{次数 } 1 \quad (8.198)$$

$$\boldsymbol{\xi}_i(\sigma, \theta) \in \text{Map}(\partial\Sigma, T_x^*[2]M) \quad \text{次数 } 2 \quad (8.199)$$

$$\mathbf{p}_i(\sigma, \theta) \in \text{Map}(\partial\Sigma, T_q^*[2]T_x[1]M) \quad \text{次数 } 1 \quad (8.200)$$

ここで、導来括弧を求めるために S_1 を与える：

$$S_1 = \mu_* \text{ev}^* \Theta \quad (8.201)$$

$$= \int_{\partial\Sigma} \mu_{\partial\Sigma}(z) \Theta(Z(z)) \quad (8.202)$$

$$= \int_{\partial\Sigma} d\sigma d\theta \boldsymbol{\xi}_i(\sigma, \theta) \mathbf{q}^i(\sigma, \theta) \quad (8.203)$$

\mathcal{L} の局所座標 (x^i, p_i) の転入写像は $\widehat{\mathcal{L}}$ の局所座標そのものである：

$$\widehat{p}r^* x^i = \mathbf{x}^i(\sigma, \theta) \quad (8.204)$$

$$\widehat{p}r^* p_i = \mathbf{p}_i(\sigma, \theta) \quad (8.205)$$

(8.194)–(8.196) を写像空間に持ち上げることで、各基底超場に対する導来括弧を得られる。つまり、(8.189) へ代入することで、次の境界 $\text{Map}(\partial\Sigma, \mathcal{M})$ 上の Poisson 括弧を得る：

$$\left\{ \{ \mathbf{x}^i(\sigma, \theta), S_1 \}, \mathbf{x}^j(\sigma', \theta') \} \right\}_{\widehat{\mathcal{L}}} = \{ \mathbf{x}^i(\sigma, \theta), \mathbf{x}^j(\sigma', \theta') \}_{PB} = 0, \quad (8.206)$$

$$\left\{ \{ \mathbf{x}^i(\sigma, \theta), S_1 \}, \mathbf{p}_j(\sigma', \theta') \} \right\}_{\widehat{\mathcal{L}}} = \{ \mathbf{x}^i(\sigma, \theta), \mathbf{p}_j(\sigma', \theta') \}_{PB} = -\delta_j^i \delta(\sigma - \sigma') \delta(\theta - \theta') \quad (8.207)$$

$$\left\{ \{ \mathbf{p}_i(\sigma, \theta), S_1 \}, \mathbf{p}_j(\sigma', \theta') \} \right\}_{\widehat{\mathcal{L}}} = \{ \mathbf{p}_i(\sigma, \theta), \mathbf{x}^j(\sigma', \theta') \}_{PB} = 0 \quad . \quad (8.208)$$

ただし、ラグランジュ部分多様体 $\widehat{\mathcal{L}}$ を $\widehat{\mathcal{L}}_\theta = \{(\mathbf{x}^i, \mathbf{p}_i, \mathbf{q}^i, \boldsymbol{\xi}_i) | \boldsymbol{\xi}_i = \mathbf{q}^i = 0\}$ にとる。このとき、ラグランジュ部分多様体の定義より ω は零となり、同時に S_1 も零となる。このようにして、定義 8.2 を用いて、境界上の Poisson 括弧を定めることが出来た。この方法の良いところは、次に見るように標的空間のフラックスを Θ を変えることで、統一的に反映させることが出来る。

各超場を $\partial\Sigma = T[1]S^1$ のグラスマン方向について局所座標 θ で級数展開すると以下となる：

$$\Phi^{(n)}(\sigma, \theta) = \Phi^{(n)}(\sigma) + \Phi^{(n-1)}(\sigma)\theta \quad , \quad (8.209)$$

グラスマン座標であるため、級数展開は θ の 1 次で止まる。 n は超場 Φ の次数である。展開後の成分場は θ の次数、すなわち次数が 1 だけ下がったものを含む。超場 \mathbf{x} , \mathbf{p} の次数はそれぞれ 0, 1 であるため、それぞれの展開に物理的な場 $x^{(0)i}(\sigma)$ と $p_i^{(0)}(\sigma)$ が現れる。

物理的な基底についての Poisson 括弧は (8.206)–(8.208) を計算すると、最左辺は $\delta(\theta - \theta')$ に比例するので、両辺のデルタ関数を落とせば以下を得る：

$$\{x^i(\sigma), x^j(\sigma')\}_{PB} = 0, \quad (8.210)$$

$$\{x^i(\sigma), p_j(\sigma')\}_{PB} = \delta_j^i \delta(\sigma - \sigma'), \quad (8.211)$$

$$\{p_i(\sigma), p_j(\sigma')\}_{PB} = 0 \quad (8.212)$$

これはハミルトン形式における境界上の位相的シグマ模型の物理的な場に対する Poisson 括弧である。

H フラックスを含む境界 $\widehat{\mathcal{L}}_\theta$ 上の Poisson 括弧を定義するためには、標準的 Courant algebroid の Q 構造関数

$$\Theta = \xi_i q^i + \frac{1}{3!} H_{ijk}(x) q^i q^j q^k \quad (8.213)$$

を用いれば良い。この Θ を用いると、 \mathcal{L}_θ 上の基底に対する導来括弧は次のように変更される：

$$\{ \{ x^i, \Theta \}, x^j \} = 0, \quad (8.214)$$

$$\{ \{ x^i, \Theta \}, p_j \} = \delta_j^i, \quad (8.215)$$

$$\{ \{ p_i, \Theta \}, p_j \} = -H_{ijk}(x) q^k. \quad (8.216)$$

写像空間 $\text{Map}(\partial\Sigma, \mathcal{M})$ 上の超場は (8.197)-(8.200) と同じである．ふたたび，導来括弧を求めるために S_1 を与える：

$$S_1 = \mu_* \text{ev}^* \Theta \quad (8.217)$$

$$= \int_{\partial\Sigma} d\sigma d\theta \left(\xi_i q^i + \frac{1}{3!} H_{ijk}(x) q^i q^j q^k \right) \quad (8.218)$$

(8.214)–(8.216) を写像空間に持ち上げることで，各基底超場に対する導来括弧を得られる：

$$\{\{\mathbf{x}^i(\sigma, \theta), S_1\}, \mathbf{x}^j(\sigma', \theta')\} = 0, \quad (8.219)$$

$$\{\{\mathbf{x}^i(\sigma, \theta), S_1\}, \mathbf{p}_j(\sigma', \theta')\} = -\delta^i_j \delta(\sigma - \sigma') \delta(\theta - \theta'), \quad (8.220)$$

$$\{\{\mathbf{p}_i(\sigma, \theta), S_1\}, \mathbf{p}_j(\sigma', \theta')\} = H_{ijk}(x) \mathbf{q}^k(\sigma, \theta) \delta(\sigma - \sigma') \delta(\theta - \theta'). \quad (8.221)$$

ここで，場を $\widehat{\mathcal{L}}_\vartheta$ 上に制限すると，(8.221) 右辺の \mathbf{q}^k が零となってしまう， H フラックスの効果が残らない． H フラックスの効果を残すためには， S_1 を変形する，もしくはラグランジアン部分多様体 $\widehat{\mathcal{L}}_\vartheta$ を変形することである．我々は \mathcal{M} 上の正準変換によって，これを実現することが出来ることを見出した．

上記を実現するための正準変換は Liouville 1 形式から $\alpha_0 = \iota_{\hat{D}} \mu_* \text{ev}^* \vartheta_{\mathcal{L}} = -\int \mu \mathbf{p}_i d\mathbf{x}^i$ とし構成することが出来る．この α_0 による正準変換は，正準変数の変換 $\mathbf{q}^k \rightarrow \mathbf{q}^k - d\mathbf{x}^k$ を与える．これにより S_1 は次のように変形される：

$$e^{\delta\alpha_0} S_1 = \int_{\partial\Sigma} d\sigma d\theta \left(\xi_i (\mathbf{q}^i - d\mathbf{x}^i) + \frac{1}{3!} H_{ijk}(x) (\mathbf{q}^i - d\mathbf{x}^i) (\mathbf{q}^j - d\mathbf{x}^j) (\mathbf{q}^k - d\mathbf{x}^k) \right) \quad (8.222)$$

この正準変換後に導来括弧を $\xi_i = \mathbf{q}^i = 0$ で定義される正準ラグランジアン部分多様体 $\widehat{\mathcal{L}}_\vartheta$ へ制限することで，次の Poisson 括弧を得る：

$$\{\mathbf{x}^i(\sigma, \theta), \mathbf{x}^j(\sigma', \theta')\}_{PB} = 0, \quad (8.223)$$

$$\{\mathbf{x}^i(\sigma, \theta), \mathbf{p}_j(\sigma', \theta')\}_{PB} = -\delta^i_j \delta(\sigma - \sigma') \delta(\theta - \theta'), \quad (8.224)$$

$$\{\mathbf{p}_i(\sigma, \theta), \mathbf{p}_j(\sigma', \theta')\}_{PB} = -H_{ijk}(x(\sigma, \theta)) d\mathbf{x}^k(\sigma, \theta) \delta(\sigma - \sigma') \delta(\theta - \theta'). \quad (8.225)$$

(8.209) と同様にして，物理的な場についてのみ Poisson 括弧を書くと以下となる：

$$\{x^i(\sigma), x^j(\sigma')\}_{PB} = 0, \quad (8.226)$$

$$\{x^i(\sigma), p_j(\sigma')\}_{PB} = \delta^i_j \delta(\sigma - \sigma'), \quad (8.227)$$

$$\{p_i(\sigma), p_j(\sigma')\}_{PB} = -H_{ijk}(x) \partial_\sigma x^k(\sigma) \delta(\sigma - \sigma'). \quad (8.228)$$

この Poisson 括弧は [44] で議論されている H フラックスがある場合の基底に対する Poisson 括弧と一致している．

8.2 ハミルトン形式とカレント代数

写像空間 $\text{Map}(\partial\Sigma, \mathcal{M})$ 上の Poisson 代数から Courant algebroid を対称性として持つカレント代数 (Alekseev-Stroble 型カレント代数) を得ることが出来る。ここで言うカレントとは、一般化ベクトルをパラメーターとして持つ場であり、カレント代数とは Courant algebroid に現れる Dorfmann 括弧を、この場の間の Poisson 括弧として実現することである。超場に拡張することによって、このカレント代数は束写像 ρ の構造も実現することが出来る。

標準的 Courant algebroid の QP 多様体 $\mathcal{M} = T^*[2]T[1]M$ を考え、その上での関数を考える。 \mathcal{M} 上の関数は次数によって分解することができ、それぞれの次数 i の部分空間を C_i とよぶ。Courant algebroid を実現するためには、超場の関数空間 $C_0 \oplus C_1$ を考えればよい。 $C_0 \oplus C_1$ の元をそれぞれ Alekseev-Stroble の表記に合わせて $j_{0(f)} \in C_0$, $j_{1(X+\alpha)} \in C_1$ とかく。具体的には以下で与えられる：

$$j_{0(f)} = f(x) \in C_0 \quad (8.229)$$

$$j_{1(X+\alpha)} = \alpha_i(x)q^i + X^i(x)p_i \in C_1 \quad . \quad (8.230)$$

ここで、 $X + \alpha$ は一般化ベクトルであり、 α_i, X^i はその成分である。これより、 C_1 の元は一般化ベクトルがパラメータである超場である。以下ではこれを超場に持ち上げることによって、様々な Courant algebroid に対応した Alekseev-Stroble 型のカレント代数が、導来括弧を用いて得られることを示す。

(8.214)-(8.216) にて標的空間 \mathcal{M} の基底座標に対する導来括弧を求めた。同様の手続きにより、全ての基底座標 (x^i, ξ_i, p_i, q^i) 間についての導来括弧を求めることが出来る。すべての座標間の導来括弧から、関数空間 $C_0 \oplus C_1$ の元に対して以下の導来括弧が成り立つことが分かる：

$$\{\{j_{0(f)}, \Theta\}, j_{0(g)}\} = 0, \quad (8.231)$$

$$\{\{j_{1(X+\alpha)}, \Theta\}, j_{0(g)}\} = -X^i \frac{\partial j_{0(g)}}{\partial x^i} = -\rho(X + \alpha)j_{0(g)}, \quad (8.232)$$

$$\{\{j_{1(X+\alpha)}, \Theta\}, j_{1(Y+\beta)}\} = -j_{1([X+\alpha, Y+\beta]_H)}, \quad (8.233)$$

ただし、 $j_{0(g)} = g(x)$, $j_{1(Y+\beta)} = \beta_i(x)q^i + Y^i(x)p_i$ であり、 $[X + \alpha, Y + \beta]_H$ は H フラックスのある場合の標準的 Courant algebroid に対する Dorfman 括弧 (3.31) である。これより、導来括弧の方法を用いて定義した標的空間の座標に対する Poisson 括弧が、関数空間 $C_0 \oplus C_1$ 上で Courant algebroid の構造を実現することが分かる。この構造を写像空間に持ち上げることで、Alekseev-Stroble 型のカレント代数が得られる。

Alekseev-Stroble 型の超カレントとは、写像空間 $\text{Map}(\partial\Sigma, \mathcal{M})$ の部分空間であるラグランジアン部分多様体への写像空間 $\widehat{\mathcal{L}} = \text{Map}(\partial\Sigma, \mathcal{L})$ の元のうち、次のように構成されるものである：

命題 8.3 (Alekseev-Stroble 型の超カレント)

関数空間の元 $j_0, j_1 \in C_0 \oplus C_1 \subset C^\infty(\mathcal{M})$ に対して

1. 転入写像 $\mu_* \text{ev}^*$ を作用させ、 $\text{Map}(\partial\Sigma, \mathcal{M})$ の元に移す.
2. $\alpha_0 = \iota_{\widehat{D}} \mu_* \text{ev}^* \vartheta_{\mathcal{L}} = -\int \mu \mathbf{p}_i d\mathbf{x}^i$ によるツイストを行う.
3. ラグランジアン部分多様体 $\widehat{\mathcal{L}} = \text{Map}(\partial\Sigma, \mathcal{L})$ ($\xi_i = \mathbf{q}^i = 0$) 上に制限する.

すなわち、以下の写像を行う：

$$C^\infty(\mathcal{M}) \supset C_0 \oplus C_1 \xrightarrow{\mu_* \text{ev}^*} \text{Map}(\partial\Sigma, \mathcal{M}) \xrightarrow{\alpha_0} \text{Map}(\partial\Sigma, \mathcal{M}) \xrightarrow{\downarrow \widehat{\mathcal{L}}} \widehat{\mathcal{L}} = \text{Map}(\partial\Sigma, \mathcal{L}) . \quad (8.234)$$

この手続きにより、以下の *Alekseev-Stroble* 型カレントが得られる：

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{0(f)} &= \widehat{p}r_* e^{\delta\alpha_0} \text{ev}^* j_{0(f)} = f(\mathbf{x}) , \\ \mathbf{J}_{1(X+\alpha)} &= \widehat{p}r_* e^{\delta\alpha_0} \text{ev}^* j_{1(u,\alpha)} = -\alpha_i(\mathbf{x}) d\mathbf{x}^i + X^i(\mathbf{x}) \mathbf{p}_i , \end{aligned} \quad (8.235)$$

超カレント \mathbf{J}_0 と \mathbf{J}_1 の次数 0 の物理的成分 J_0, J_1 は Alekseev-Strobl のカレントと一致する：

$$J_{0(f)}(\sigma) = f(x(\sigma)), \quad J_{1(X+\alpha)}(\sigma) = \alpha_i(x) \partial_\sigma x^i(\sigma) + X^i(x) p_i(\sigma) . \quad (8.236)$$

(8.219)-(8.221) にて写像空間 $\text{Map}(\partial\Sigma, \mathcal{M})$ 上の超場に対する導来括弧を求めた．同様の手続きにより、全ての基底超場 $(\mathbf{x}^i, \xi_i, \mathbf{p}_i, \mathbf{q}^i)$ 間の導来括弧を求めることができ、そこから一般の超場に対して以下の導来括弧が成り立つことが分かる：

$$\{\mathbf{J}_{0(f)}, \mathbf{J}'_{0(g)}\}_{PB} = 0, \quad (8.237)$$

$$\{\mathbf{J}_{1(X+\alpha)}, \mathbf{J}'_{0(g)}\}_{PB} = -\rho(X+\alpha) \mathbf{J}'_{0(g)} \delta(\sigma - \sigma') \delta(\theta - \theta'), \quad (8.238)$$

$$\begin{aligned} \{\mathbf{J}_{1(X+\alpha)}, \mathbf{J}_{1(Y+\beta)}\}_{PB} &= -\mathbf{J}_{1([X+\alpha, Y+\beta]_H)} \delta(\sigma - \sigma') \delta(\theta - \theta') \\ &\quad + \langle X+\alpha, Y+\beta \rangle d\delta(\sigma - \sigma') \delta(\theta - \theta'), \end{aligned} \quad (8.239)$$

ただし、 $\mathbf{J}'_{0(g)} = g(\mathbf{x}')$ 、 $\mathbf{J}'_{1(Y+\beta)} = -\beta_i(\mathbf{x}') d\mathbf{x}^i + Y^i(\mathbf{x}') \mathbf{p}_i$ である．

(8.209) と同様にして、物理的な場についてのみ Poisson 括弧を書くと以下となる：

$$\{J_{0(f)}(\sigma), J_{0(g)}(\sigma')\}_{PB} = 0, \quad (8.240)$$

$$\{J_{1(X+\alpha)}(\sigma), J_{0(g)}(\sigma')\}_{PB} = -\rho(X+\alpha)J_{0(g)}(x(\sigma))\delta(\sigma-\sigma'), \quad (8.241)$$

$$\begin{aligned} \{J_{1(X+\alpha)}(\sigma), J_{1(Y+\beta)}(\sigma')\}_{PB} &= -J_{1([X+\alpha, Y+\beta]_H)}(\sigma)\delta(\sigma-\sigma') \\ &\quad + \langle (X+\alpha), (Y+\beta) \rangle (\sigma') \partial_\sigma \delta(\sigma-\sigma'). \end{aligned} \quad (8.242)$$

このカレント代数は [44] で議論されている H フラックスがある場合の標的空間のファイバー束上の一般化カレント代数と一致している。

8.3 ハミルトン形式における R フラックス

これまで示した H フラックスが存在する場合のハミルトン形式の手続きと同様に、 R フラックスが存在する場合の Poisson Courant algebroid に対するカレント代数を求める。この構造は H フラックスが存在する場合の Courant algebroid に対する双対的な対応物となっている。

8.3.1 Poisson Courant algebroid の上の導来括弧による Poisson 括弧の導出

小節 8.1.2 の場合と同様の手続きを用いて、標的空間 \mathcal{M} の基底座標に対する導来括弧を求める。膜の境界 $\partial\Sigma$ の標的空間 M への埋め込み写像はループ空間 $LM = \text{Map}(S^1, M)$ である。Courant algebroid の場合と異なり、Poisson Courant algebroid の場合はハミルトニアン形式を構成するには、接束 $TLM = \text{Map}(S^1, TM)$ を相空間として考える。底空間の局所座標を $x^i(\sigma)$ 、ファイバー上の局所座標を $q^i(\sigma)$ とする。ただし σ は S^1 方向のパラメーターである。

写像空間に持ち上げるために $\partial\Sigma = T[1]S^1$ 上のハミルトニアン形式を考え、ループ空間に対応する写像空間 $\text{Map}(\partial\Sigma, \mathcal{L})$ 上に Poisson 括弧を構成する。標的空間 \mathcal{M} 上の写像空間 $\text{Map}(\partial\Sigma, \mathcal{M})$ に導来括弧を定義し、それをループ空間に対応する写像空間 $\widehat{\mathcal{L}}_\theta$ へ制限することで Poisson 括弧を構成する。

まず、Poisson Courant algebroid の QP 多様体 $\mathcal{M} = T^*[2]T[1]M$ を考える。 \mathcal{M} の局所 Darboux 座標として (x^i, p_i, q^i, ξ_i) をとる。それぞれの次数は $(0, 1, 1, 2)$ である。正準次数付き

シンプレクティック構造は再び

$$\omega = \delta\vartheta \quad (8.243)$$

$$= \delta(x^i \delta\xi_i + p_i \delta q^i) \quad (8.244)$$

$$= \delta x^i \wedge \delta\xi_i + \delta p_i \wedge \delta q^i \quad (8.245)$$

となる． Courant algebroid の場合と異なり， Poisson Courant algebroid の場合は ω に対する正準ラグランジアン部分多様体かつ $\vartheta = 0$ なる部分空間を双対的なもの，つまり $\mathcal{L}_\vartheta = \{(x^i, q^i) \mid \xi_i = p_i = 0\}$ にとる⁵．

Q 構造は (5.86) を用いる：

$$\Theta_R = \pi^{ij}(x)\xi_i p_j - \frac{1}{2} \frac{\partial \pi^{jk}}{\partial x^i}(x) q^i p_j p_k + \frac{1}{3!} R^{ijk}(x) p_i p_j p_k$$

これにより， \mathcal{M} 上の導来括弧が (x^i, p_i, q^i, ξ_i) の自分を含む任意のペアの間に定義される． Θ の具体形から， 非零の値を持ちうるのは (x^i, q^i) のペアについてだけである：

$$\{\{x^i, \Theta_R\}, x^j\} = 0, \quad (8.246)$$

$$\{\{x^i, \Theta_R\}, q^j\} = -\{\{q^j, \Theta_R\}, x^i\} = \pi^{ij}(x), \quad (8.247)$$

$$\{\{q^i, \Theta_R\}, q^j\} = -R^{ijk}(x) p_k + \frac{\partial \pi^{ij}}{\partial x^k}(x) q^k. \quad (8.248)$$

次に， (8.246)-(8.248) を写像空間に引き上げることで， 超場 (8.197)-(8.200) に移り， 超場間の導来括弧が次で定まる． (8.190) より S_1 は以下のように定まる：

$$S_1 = \mu_* \text{ev}^* \left(\pi^{ij}(\mathbf{x}) \xi_i \mathbf{p}_j - \frac{1}{2} \frac{\partial \pi^{jk}}{\partial x^i}(\mathbf{x}) \mathbf{q}^i \mathbf{p}_j \mathbf{p}_k + \frac{1}{3!} R^{ijk}(\mathbf{x}) \mathbf{p}_i \mathbf{p}_j \mathbf{p}_k \right) \quad (8.249)$$

$$= \int_{\partial \Sigma} d\sigma d\theta \left(\pi^{ij}(\mathbf{x}) \xi_i \mathbf{p}_j - \frac{1}{2} \frac{\partial \pi^{jk}}{\partial x^i}(\mathbf{x}) \mathbf{q}^i \mathbf{p}_j \mathbf{p}_k + \frac{1}{3!} R^{ijk}(\mathbf{x}) \mathbf{p}_i \mathbf{p}_j \mathbf{p}_k \right) \quad (8.250)$$

この S_1 及び導来括弧 (8.189) より， 写像空間上の Poisson 括弧は次のように定まる：

$$\{\{\mathbf{x}^i(\sigma, \theta), \Theta_R\}, \mathbf{x}^j(\sigma', \theta')\} = 0, \quad (8.251)$$

$$\{\{\mathbf{x}^i(\sigma, \theta), \Theta_R\}, \mathbf{q}^j(\sigma', \theta')\} = -\pi^{ij}(\mathbf{x}(\sigma, \theta)) \delta(\sigma - \sigma') \delta(\theta - \theta'), \quad (8.252)$$

$$\{\{\mathbf{q}^i(\sigma, \theta), \Theta_R\}, \mathbf{q}^j(\sigma', \theta')\} = -\frac{\partial \pi^{ij}}{\partial \mathbf{x}^k}(\mathbf{x}(\sigma, \theta)) \mathbf{q}^k(\sigma, \theta) \delta(\sigma - \sigma') \delta(\theta - \theta'). \quad (8.253)$$

⁵ (x^i, p_i) は余接束の局所座標であるが， (x^i, q^i) は接束の局所座標である．

α_0 による正準変換によって、座標変換 $\mathbf{p}_i \rightarrow \mathbf{p}_i - (\pi^{-1})_{ij} d\mathbf{x}^j$ が引き起こされ、ラグランジアン部分多様体が変形される．この変形されたラグランジアン部分多様体への導来括弧の制限 $\xi_i = \mathbf{p}_i = 0$ により、導来括弧が以下に変形される：

再び超場を (8.209) により展開して、次数 0 の物理的場のについての Poisson 括弧を得る：

$$\{x^i(\sigma), x^j(\sigma')\}_{PB} = 0, \quad (8.254)$$

$$\{x^i(\sigma), q^j(\sigma')\}_{PB} = \pi^{ij}(x(\sigma))\delta(\sigma - \sigma'), \quad (8.255)$$

$$\{q^i(\sigma), q^j(\sigma')\}_{PB} = \left(-R^{ijk}(x)(\pi^{-1})_{kl}(x)\partial_\sigma x^l + \frac{\partial\pi^{ij}}{\partial x^k}(x)q^k \right)(\sigma)\delta(\sigma - \sigma'). \quad (8.256)$$

ここでは簡単のため、Poisson 構造 π は非退化だと仮定した．これはハミルトン形式における Poisson シグマ模型の境界上に現れる 2 次元位相的シグマ模型の物理的場に対する Poisson 括弧である．

(8.254)–(8.256) の Poisson 括弧の結果は、二重場理論において β 変換を行った場合に出てくる Poisson 括弧と同じものである． $R = 0$ の場合は、 M 上の Poisson 構造 π から誘起 [48] される TM 上の Poisson 構造を写像空間に引き戻すことで、Poisson 括弧 (8.254)–(8.256) が得られる．この場合は R フラックスを含む項は β 変換によって現れる． β 変換とは、2 ベクトル $\beta = \frac{1}{2}\beta^{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j}$ によって引き起こされる次の変換である：

$$x^i \rightarrow x^i \quad (8.257)$$

$$q^i \rightarrow q^i + \beta^{ij}\pi_{jk}^{-1}\partial_\sigma x^k \quad (8.258)$$

ただし β は $d_\pi\beta := [\pi, \beta]_S = R$ をみたす．

(8.254)–(8.256) の Poisson 括弧を出すような Alekseev-Strobl 型のシンプレクティック形式は次で与えられる：

$$\omega = \int_{S^1} d\sigma (\pi^{-1})_{ij}\delta x^i \wedge \delta q^j - \frac{1}{2} \int_{S^1} d\sigma \left(-R^{ijk}(\pi^{-1})_{kl}\partial_\sigma x^l + \frac{\partial\pi^{ij}}{\partial x^k}q^k \right) (\pi^{-1})_{im}\delta x^m \wedge (\pi^{-1})_{jn}\delta x^n. \quad (8.259)$$

8.4 R フラックスの存在する反変的カレント代数

小節 8.2 で行ったのと同様の手法により、Poisson Courant algebroid の場合のカレント代数を構成する．

標的空間 $T^*[2]T[1]M$ は Alekseev-Strobl のカレント代数の標的空間と同じに取る. j_0 と j_1 の定義は (8.229), (8.230) と同じである. 次に α_0 による正準変換は座標変換 $\mathbf{p}_i \rightarrow \mathbf{p}_i - (\pi^{-1})_{ij} d\mathbf{x}^j$ を引き起こし, ラグランジアン部分多様体が変形される. そして, その変形されたラグランジアン部分多様体上へ $j_{0,1}$ を制限することで, 次のように超場のカレントを得る:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{(0)(f)} &= \tilde{p}r_* e^{\delta\alpha_0} \mu_* \text{ev}^* j_{(0)(f)} = f(\mathbf{x}), \\ \mathbf{J}_{(1)(X+\alpha)} &= \tilde{p}r_* e^{\delta\alpha_0} \mu_* \text{ev}^* j_{(1)(u,\alpha)} = -X^i(\mathbf{x})(\pi^{-1})_{ij} d\mathbf{x}^j + \alpha_i(\mathbf{x})q^i. \end{aligned}$$

この超場のカレントから次数 0 の物理的部分のみを抜き出せば, 次の Alekseev-Strobl 型カレントが得られる:

$$J_{0(f)}(\sigma) = f(x(\sigma)) \quad (8.260)$$

$$J_{1(X+\alpha)}(\sigma) = X^i(x(\sigma))(\pi^{-1})_{ij} \partial_\sigma x^j(\sigma) + \alpha_i(x(\sigma))q^i(\sigma). \quad (8.261)$$

これらの超幾何学的カレントの Poisson 代数は, 正準変数に対する Poisson 代数を用いて次のように計算される:

$$\begin{aligned} \{\mathbf{J}_{0(f)}, \mathbf{J}_{0(g)}\}_{PB} &= 0, \\ \{\mathbf{J}_{1(X+\alpha)}, \mathbf{J}_{0(g)}\}_{PB} &= \rho(X+\alpha)\mathbf{J}_{0(g)}, \\ \{\mathbf{J}_{1(X+\alpha)}, \mathbf{J}_{1(Y+\beta)}\}_{PB} &= \mathbf{J}_{1([X+\alpha, Y+\beta]_R^\pi)} \\ &\quad + \langle X+\alpha, Y+\beta \rangle d\delta(\sigma-\sigma')\delta(\theta-\theta'). \end{aligned} \quad (8.262)$$

ただし (4.60) を用いた. これは $TM \oplus T^*M$ 上の R フラックスのある反変的 Dorfman 括弧であり, $\rho(X+\alpha) = \pi^\sharp(\alpha)$ は錨写像 (anchor map) である. 超場を次数によって成分分解し, 次数 0 の物理的カレントについての Poisson 代数を求めると以下になる:

$$\{J_{0(f)}(\sigma), J_{0(g)}(\sigma')\}_{PB} = 0, \quad (8.263)$$

$$\{J_{1(X+\alpha)}(\sigma), J_{0(g)}(\sigma')\}_{PB} = -\rho(X+\alpha)J_{0(g)}(x(\sigma))\delta(\sigma-\sigma'), \quad (8.264)$$

$$\begin{aligned} \{J_{1(X+\alpha)}(\sigma), J_{1(Y+\beta)}(\sigma')\}_{PB} &= -J_{1([X+\alpha, Y+\beta]_R^\pi)}(\sigma)\delta(\sigma-\sigma') \\ &\quad + \langle X+\alpha, Y+\beta \rangle(\sigma')\partial_\sigma\delta(\sigma-\sigma'). \end{aligned} \quad (8.265)$$

ここで注意することは, カレント代数を求めるには Poisson 構造 π に対する非退化条件を課す必要はない.

9 結果と議論

超弦理論のコンパクト化の問題には弦固有の様々な特徴が現れ、素粒子標準模型を導くために不可欠であるにもかかわらず、その全容は未だ明らかになっていない。本研究では、超弦理論特有の対称性である T 双対性の解析から、その存在が示唆される非幾何学的フラックスの幾何学的特徴付けを提唱した。特に R フラックスが存在する場合の超弦理論の背景時空の幾何学として微分幾何的表式を求め、背景時空の対称性の構造を明らかにした。その解析に基づいて、そのような背景時空上を伝搬する弦に対するシグマ模型、特に位相的シグマ模型を構成し、理論の対称性となるカレント代数の解析を行った。

本研究では Courant algebroid が重要な役割を果たしている。本文中で議論したように、Courant algebroid というのは多様体 M 上のベクトル束 $TM \oplus T^*M$ 上の構造で、超重力理論の背景時空の対称性を反映する。algebroid に含まれる束写像 ρ は束 $TM \oplus T^*M$ の元を束 TM に写像し、Courant algebroid は束 TM 上の通常のベクトル場の Lie 代数が成す構造の拡張となっている。よって Courant algebroid が定まれば束の微分幾何構造が明らかとなる。例えば、Courant algebroid が与えられれば Levi-Civita 接続の一般化である Hitchin 接続を作ることができ、通常の TM 上の微分幾何学と同様の議論を展開することが可能となる。さらに位相的 T 双対性が Courant algebroid 間の同型として特徴付けられていることが、我々の目的である T 双対性の解析に有用である。

R フラックスが存在する場合は、標準的な Courant algebroid を用いることはできない。 T 双対性の考察から、本研究では Poisson Courant algebroid を用いることを提案している。先行研究では QP 多様体を用いた Courant algebroid の構成方法が調べられているが、本研究では標的空間にポアソンテンソル $\pi^{\mu\nu}$ を仮定し、ポアソン多様体上の QP 多様体を用いて、 R フラックスを含む Poisson Courant algebroid を構成した。先行研究 [7] で議論されているフラックス連鎖は、形式的な位相的 T 双対性を取っているに過ぎないが、本研究の結果は背景時空にポアソンテンソル $\pi^{\mu\nu}$ が存在すれば、 H フラックスから R フラックスへ移る位相的 T 双対性が可能となることを示している。求めた R フラックスの表式は DFT に強い切断条件を課した場合に得られる R フラックスと一致しており、 T 双対性由来の弦理論的幾何学の情報を含んだフラックスとなっていると期待できる。

この QP 多様体上での位相的 T 双対性変換というのは、 QP 多様体の P 構造を保つ変換、つまり正準変換によって実現されている。本研究では R フラックスのある Poisson Courant algebroid と H フラックスが存在する場合の Courant algebroid が正準変換によって移り変わることを示しており、これはすなわち、 H フラックスが存在する場合の背景時空の対称性構

造と R フラックスが存在するときの背景時空の対称性構造に双対性があることを意味する。特に重要なことは、 H フラックスと R フラックス間に双対性が存在すること以上に、正準変換で繋がる標準的 Courant algebroid と Poisson Courant algebroid は同型であり、正準変換は Courant algebroid 間の位相的 T 双対性を記述していることである。さらに、Poisson Courant algebroid の具体型を手に入れたことで、 R フラックスを含む背景時空上の微分幾何構造を議論することが可能となる。例えば、この結果を使ってポアソン多様体上の重力を構成すると、反変重力が得られることが分かっている [49]。

この正準変換による位相的 T 双対性変換の QP 多様体による定式化はいくつかの興味深い対象に応用することができる。その一つは位相的弦理論の間の双対的な定義を与えることである。これは、位相的弦理論を位相的膜理論の境界として構成することで可能になる。位相的膜理論の境界にフラックスを持つ位相的弦理論を定義するのには工夫が必要であるが、本論文で構成した方法を使うことにより可能となり、位相的膜理論の正準変換を行って、その後境界に制限することで、異なるフラックスを持つ位相的弦理論が得られることが分かり、これは逆に境界条件を取り替えることに焼き直す事もできる。その結果、膜理論の境界条件の取り方の違いが H フラックスと R フラックスを持つ二つの理論を生むことが分かった。

今後の方向性としては、以下のようなことが興味深い。本論文で構成されている理論は位相的理論であるが、通常の Wess Zumino Witten モデルの言葉で言えば、作用を Liouville 項、ハミルトニアン項、Wess-Zumino 項に分けた場合に、ハミルトニアン項を 0 とした理論になっている。そこで、この境界上の理論に非自明なハミルトニアン項を手で導入すると、フラックスのあるダイナミカルな弦理論のシグマモデルを書くことができる。特に R フラックスのある理論は Poisson 構造 $\pi^{\mu\nu}$ の存在を仮定しており、その条件の下で正しく弦理論になっているか、特に R フラックスがあるときの弦理論として解析出来るかどうかは、今後の研究課題である。

R フラックスのある弦理論の解析の一つとして、本論文ではハミルトニアン形式に移り、Alekseev-Strobl 型のカレント代数を考察した。ここでは Alekseev-Strobl 型のカレント代数を QP 多様体の方法を用いて構成し、その双対性との整合性を示した。さらに興味深いのは、ここに現れるカレントが、何らかの物理的な理論の保存カレントとして現れる場合である。DFT では標的空間の多様体自体を T 双対性変換の対称性に合わせて $M \oplus \tilde{M}$ と拡張し⁶、後で物理的な計算を行う際に切断条件を課すことで、場が依存する多様体の次元を半分に制限するこ

⁶ M は通常の 10 次元の標的空間に対応する多様体で、 \tilde{M} は閉弦の巻き付きモードに対応する共変的な座標を持つ 10 次元多様体である。

とを行う．これらの理論もファイバー束 $T(M \oplus \tilde{M})$ 上に，拡張された Courant algebroid の構造を持ち，確かに R フラックスを含む非幾何学的フラックスに相当するものが自然と現れる．しかし，この非幾何学的フラックスは弦理論をコンパクト化した際に現れるクラスより広いクラスである可能性がある．一方本論文の方法は，標的空間の次元は拡張せず，あくまで標的空間上のファイバー束を T 双対性変換の対称性を含むように拡張している．そのため，求めた R フラックスは弦理論から現れるクラスになっていると期待できる．また，DFT の背景時空の持つ構造は拡張された Courant algebroid であるが [50]，これから上手く部分代数を切り出すことで，標準的 Courant algebroid 及び Poisson Courant algebroid が現れる．これは切断条件の取り替えに相当し，様々な Courant algebroid を取り出すことができると期待されるが，部分代数を切り出すより系統的な方法が分かれば興味深い．

謝辞

本論文の作成の助言及び、9年間という大変長きにわたり温かいご指導，議論をして下さった指導教官の綿村哲准教授に深く感謝致します。また，論文内容，執筆に関して様々な議論をして下さった池田憲明さん，Marc Andre Heller さん，Ursula Crow-Watamura さん，浅川嗣彦さん，その他の皆さまには大変感謝致しております。加えて，素粒子・宇宙理論研究室の皆さまにおきましても，大変長い間ご迷惑をお掛けし，大変お世話になりました。深く感謝致します。

A Schouten 括弧

Lie 括弧の自然な拡張である Schouten 括弧 (Schouten-Nijenhuis 括弧とも呼ばれる) を定義する. 滑らかな多様体 M に対して, 接ベクトル空間 TM の切断 $\Gamma(TM)$ 上に反対称積 \wedge によって外積代数 $\Gamma(\wedge^\bullet TM)$ を構成する. この空間 $\Gamma(\wedge^\bullet TM)$ の弦をポリベクトル空間と呼ぶ. この外積代数上に以下の Schouten 括弧 $[-, -]_S : \wedge^m TM \times \wedge^n TM \rightarrow \wedge^{m+n-1} TM$ を次のように定義する:

$a_i, b_j \in \Gamma(TM)$ に対して

$$[a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_m, b_1 \wedge b_2 \wedge \cdots \wedge b_n]_S = \sum_{i,j} (-1)^{i+j} [a_i, b_j]_{\text{Lie}} a_1 \wedge \cdots \wedge a_{i-1} \wedge a_{i+1} \wedge \cdots \wedge a_m \wedge b_1 \wedge \cdots \wedge b_{j-1} \wedge b_{j+1} \wedge \cdots \wedge b_n \quad (\text{A.266})$$

$a_i \in \Gamma(TM), f \in C^\infty(M)$ に対して

$$[f, a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_m]_S = -\iota_{df}(a_1 \wedge \cdots \wedge a_m) \quad (\text{A.267})$$

この Schouten 括弧は以下の性質を満たす:

$a, b, c \in \Gamma(\wedge^\bullet TM)$ に対して

$$[a, b]_S = \mathcal{L}_a b \quad (\text{ベクトル場 } a, b \in \Gamma(TM) \text{ に対しては Lie 括弧と同値}) \quad (\text{A.268})$$

$$[a, b]_S = -(-1)^{(|a|-1)(|b|-1)} [b, a]_S \quad (\text{反対称性}) \quad (\text{A.269})$$

$$[a, [b, c]_S]_S = [[a, b]_S, c]_S + (-1)^{(|a|-1)(|b|-1)} [b, [a, c]_S]_S \quad (\text{Jacobi 恒等式}) \quad (\text{A.270})$$

$$[a, b \wedge c]_S = [a, b]_S \wedge c + (-1)^{|b|(|a|-1)} b \wedge [a, c]_S \quad (\text{Poisson 恒等式}) \quad (\text{A.271})$$

$$[f, g]_S = 0 \quad (f, g \in C^\infty(M)) \quad (\text{A.272})$$

ただし, $|a|$ はポリベクトルの次数を表し, $a \in \Gamma(\wedge^n TM)$ ならば $|a| = n$ である. 組 $(\wedge^\bullet TM, [-, -]_S)$ は Lie 代数 $(TM, [-, -]_{\text{Lie}})$ の拡張であり, Gerstenhaber 代数の例となっている.

例えば, 2 ベクトル π に関して以下の関係が成り立つ:

$$[\pi, \pi]_S = \left[\frac{1}{2} \pi^{ij} \partial_i \wedge \partial_j, \frac{1}{2} \pi^{kl} \partial_k \wedge \partial_l \right]_S \quad (\text{A.273})$$

$$= \pi^{ij} \partial_j \pi^{kl} \partial_i \wedge \partial_k \wedge \partial_l. \quad (\text{A.274})$$

このことから, 2 ベクトル π によって定義される Poisson 括弧 $\{f, g\} = \pi^{ij} \partial_i f \partial_j g$ が Jacobi 恒等式:

$$\{\{f, g\}, h\} + \{\{h, f\}, g\} + \{\{g, h\}, f\} = 0 \quad (\text{A.275})$$

を満たすことと $[\pi, \pi]_S = 0$ は等価である．この条件を満たす 2 ベクトル π は Poisson 構造と呼ばれる．

B 次数付き多様体とその上の演算規則

B.1 次数付き多様体 \mathcal{M}

次数付き多様体 \mathcal{M} は環付き空間で，通常の滑らかな多様体 M 上の Z -graded な可換代数がその構造層となっているものである．その次数は超多様体の場合と同じく，次数が偶数の変数は可換で奇数の場合は反可換となる．

定義より \mathcal{M} の構造層 (Z -graded な可換代数) は $\mathcal{C}^\infty(U) \otimes S^\bullet(V)$ に局所同型である．ただし， U は M 上の局所座標， V は次数付きベクトル空間， $S^\bullet(V)$ は V 上の次数付き自由可換環とする．数学的により厳密な定義は [20, 21] を参照されたい．

B.2 基本となる演算規則

\mathcal{M} 上の局所座標の座標変数として z を用いる．関数に対する微分は

$$df(z) = dz^a \frac{\vec{\partial}}{\partial z^a} f, \quad (\text{B.276})$$

ベクトル場は局所座標を用いて

$$X = X^a(z) \frac{\vec{\partial}}{\partial z^a} \quad (\text{B.277})$$

と書かれる．内部積は $T[1]\mathcal{M}$ 上のベクトル場の作用として

$$\iota_X = (-1)^{|X|} X^a(z) \frac{\vec{\partial}}{\partial dz^a} \quad (\text{B.278})$$

と定義する．ただし $\frac{\vec{\partial}}{\partial dz^a} dz^b = \delta_a^b$ とした．ここで次数付き微分形式の次数勘定について説明する．次数付き微分形式の場合は，微分形式からの寄与による次数と次数付き多様体からの寄与による次数の両方を考える必要がある．本論文ではその和を全次数と呼び，次数付き微分形式 α の全次数を $|\alpha|$ と書く．例として (B.278) 式では $|d| = 1$, $|dz^a| = |z^a| + 1$, $|\iota_X| = |X| - 1$ となっている．

次数付き Lie 括弧は

$$[X, Y] = X^a \frac{\vec{\partial} Y^b}{\partial z^a} \frac{\vec{\partial}}{\partial z^b} - (-1)^{|X||Y|} Y^a \frac{\vec{\partial} X^b}{\partial z^a} \frac{\vec{\partial}}{\partial z^b}, \quad (\text{B.279})$$

となる。これから

$$Xf = (-1)^{|X|} \iota_X df = (-1)^{(|f|+1)|X|} df(X) \quad (\text{B.280})$$

の関係式を得る。ただし $dz^a(\frac{\vec{\partial}}{\partial z^b}) = \delta_b^a$ とした。

証明 (B.280) 式を示す。まず左辺は $Xf = X^a(z) \frac{\vec{\partial} f}{\partial z^a}$ である。中辺は

$$(-1)^{|X|} \iota_X df = (-1)^{|X|} (-1)^{|X|} X^a(z) \frac{\vec{\partial}}{\partial dz^a} \left(dz^a \frac{\vec{\partial} f}{\partial z^a} \right). \quad (\text{B.281})$$

右辺は

$$df(X) = dz^a \frac{\vec{\partial} f}{\partial z^a} \left(X^b(z) \frac{\vec{\partial}}{\partial z^b} \right) \quad (\text{B.282})$$

$$= (-1)^{(|f|-|z|)|X|} \left[dz^a \left(X^b(z) \frac{\vec{\partial}}{\partial z^b} \right) \right] \frac{\vec{\partial} f}{\partial z^a} \quad (\text{B.283})$$

$$= (-1)^{(|f|-|z|)|X|} (-1)^{(|X|-|z|)(|z|+1)} X^b(z) \left[dz^a \left(\frac{\vec{\partial}}{\partial z^b} \right) \right] \frac{\vec{\partial} f}{\partial z^a} \quad (\text{B.284})$$

$$= (-1)^{(|f|+1)|X|} X^a(z) \frac{\vec{\partial} f}{\partial z^a}. \quad (\text{B.285})$$

従って (B.280) 式は示された。

B.3 カルタン関係式

Lie 微分は

$$\mathcal{L}_X = \iota_X d - (-1)^{(|X|-1) \times 1} d \iota_X = \iota_X d + (-1)^{|X|} d \iota_X \quad (\text{B.286})$$

と定義する。 $|\mathcal{L}_X| = |X|$ である。

α と β を次数付き微分形式とすると、以下のカルタン関係式が成り立つ。

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{|\alpha||\beta|} \beta \wedge \alpha, \quad (\text{B.287})$$

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^{|\alpha|} \alpha \wedge d\beta, \quad (\text{B.288})$$

$$\iota_X(\alpha \wedge \beta) = \iota_X \alpha \wedge \beta + (-1)^{|\alpha|(|X|+1)} \alpha \wedge \iota_X \beta, \quad (\text{B.289})$$

$$\mathcal{L}_X(\alpha \wedge \beta) = \mathcal{L}_X \alpha \wedge \beta + (-1)^{|\alpha||X|} \alpha \wedge \mathcal{L}_X \beta, \quad (\text{B.290})$$

$$\mathcal{L}_X d = (-1)^{|X|} d \mathcal{L}_X, \quad (\text{B.291})$$

$$\iota_X \iota_Y - (-1)^{(|X|-1)(|Y|-1)} \iota_Y \iota_X = 0, \quad (\text{B.292})$$

$$\mathcal{L}_X \iota_Y - (-1)^{|X|(|Y|-1)} \iota_Y \mathcal{L}_X = \iota_{[X,Y]}, \quad (\text{B.293})$$

$$\mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y - (-1)^{|X||Y|} \mathcal{L}_Y \mathcal{L}_X = \mathcal{L}_{[X,Y]}. \quad (\text{B.294})$$

B.4 次数付き微分形式

$\alpha = dz^{a_1} \wedge \cdots \wedge dz^{a_m} \alpha_{a_1 \cdots a_m}(z)$ を \mathcal{M} 上の m -形式とする. α と \mathcal{M} 上のベクトル場 X の縮約は

$$\alpha(X, -, \dots, -) = (-1)^{|X|(|\alpha|+1)} \iota_X \alpha(-, \dots, -). \quad (\text{B.295})$$

と書ける.

証明 左辺を計算すると

$$\alpha(X, -, \dots, -) = dz^{a_1} \wedge \cdots \wedge dz^{a_m} \alpha_{a_1 \cdots a_m}(z) \left(X^b \frac{\vec{\partial}}{\partial z^b} \right) \quad (\text{B.296})$$

$$= (-1)^{|X|(|\alpha|-|z|-1)} dz^{a_1} \left(X^b \frac{\vec{\partial}}{\partial z^b} \right) dz^{a_2} \wedge \cdots \wedge dz^{a_m} \alpha_{a_1 \cdots a_m}(z) \quad (\text{B.297})$$

$$= (-1)^{|X|(|\alpha|-|z|-1)} (-1)^{(|X|-|z|)(|z|+1)} X^{a_1} dz^{a_2} \wedge \cdots \wedge dz^{a_m} \alpha_{a_1 \cdots a_m}(z) \quad (\text{B.298})$$

$$= (-1)^{|X||\alpha|} X^{a_1} dz^{a_2} \wedge \cdots \wedge dz^{a_m} \alpha_{a_1 \cdots a_m}(z) \quad (\text{B.299})$$

$$= (-1)^{|X||\alpha|} (-1)^{|X|} \iota_X \alpha. \quad (\text{B.300})$$

となる.

(B.295) 式を帰納的に用いれば, 一般の式

$$\alpha(X_m, X_{m-1}, \dots, X_1) = -(-1)^{\sum_{i=1}^m |X_i|(|\alpha|+i)} \iota_{X_m} \cdots \iota_{X_1} \alpha, \quad (\text{B.301})$$

$$\alpha(X_m, \dots, X_j, \dots, X_i, \dots, X_1) = -(-1)^{|X_i||X_j|} \alpha(X_m, \dots, X_i, \dots, X_j, \dots, X_1). \quad (\text{B.302})$$

を得る．特に α が 2-形式のときは

$$\alpha(X, Y) = (-1)^{|X|(|f|+1)} Xf \quad (\text{B.303})$$

となる．

B.5 次数付き外微分

関数に対する外微分は (B.280) 式で与えられた．

$$df(X) = (-1)^{|X|(|f|+1)} Xf \quad (\text{B.304})$$

α を \mathcal{M} 上の 1-形式とする．カルタン関係式より

$$d\alpha(X_1, X_2) = (-1)^{|X_1||\alpha|} X_1\alpha(X_2) - (-1)^{|X_2||\alpha|} (-1)^{|X_1||X_2|} X_2\alpha(X_1) - \alpha([X_1, X_2]). \quad (\text{B.305})$$

を得る． \mathcal{M} 上の 2-形式 α に対しては

$$d\alpha(X_1, X_2, X_3) = (-1)^{|X_1|(|\alpha|+1)} X_1\alpha(X_2, X_3) \quad (\text{B.306})$$

$$- (-1)^{|X_2|(|\alpha|+1)} (-1)^{|X_1||X_2|} X_2\alpha(X_1, X_3) \quad (\text{B.307})$$

$$+ (-1)^{|X_3|(|\alpha|+1)} (-1)^{(|X_1|+|X_2|)|X_3|} X_3\alpha(X_1, X_2) \quad (\text{B.308})$$

$$- \alpha([X_1, X_2], X_3) + (-1)^{|X_2||X_3|} \alpha([X_1, X_3], X_2) \quad (\text{B.309})$$

$$- (-1)^{|X_1|(|X_2|+|X_3|)} \alpha([X_2, X_3], X_1). \quad (\text{B.310})$$

を得る．同様に帰納的な計算により， \mathcal{M} 上の m -形式 α に対しては

$$d\alpha(X_1, X_2, \dots, X_m) = \sum_{i=1}^m (-1)^{i-1} (-1)^{|X_i|(|\alpha|+m)} (-1)^{\sum_{k=1}^{i-1} |X_i||X_k|} X_i\alpha(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_m). \quad (\text{B.311})$$

$$+ \sum_{i < j} (-1)^{i+j} (-1)^{\sum_{k=1}^{i-1} |X_i||X_k| + \sum_{l=1, l \neq j}^{j-1} |X_j||X_l|} \\ \times \alpha([X_i, X_j], \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_m) \quad (\text{B.312})$$

を示すことができる．

B.6 次数付きシンプレクティック形式と Poisson 括弧

ω を次数 n のシンプレクティック形式とする．シンプレクティック形式 ω は 2-形式なので全次数は $|\omega| = n + 2$ となる．対応する Darboux 座標を $z = (q^a, p_a)$ ととる．ただし $|q| + |p| = n$ である．シンプレクティック形式 ω は

$$\omega = (-1)^{|q|(|p|+1)} dq^a \wedge dp_a = (-1)^{n|q|} dq^a \wedge dp_a \quad (\text{B.313})$$

$$= (-1)^{n|q|} (-1)^{(|q|+1)(|p|+1)} dp_a \wedge dq^a = (-1)^{|p|+1} dp_a \wedge dq^a \quad (\text{B.314})$$

このシンプレクティック形式を導く Liouville 1-形式 ϑ は, $\omega = -d\vartheta$ より

$$\vartheta = (-1)^{|p|} p_a dq^a = -(-1)^{n+1-|q|} p_a dq^a = (-1)^{|q||p|} dq^a p_a \quad (\text{B.315})$$

$$= -(-1)^{|q|(|p|+1)} q^a dp_a = -dp_a q^a \quad (\text{B.316})$$

と定まる．関数 f のハミルトニアンベクトル場 X_f は

$$\iota_{X_f} \omega = -df \quad (\text{B.317})$$

として定まる．次数は $|X_f| = |f| - n$ である．ハミルトニアンベクトル場 X_f の Darboux 座標での具体的な形を求める為に, $X_f = X_a \frac{\vec{\partial}}{\partial p_a} + Y^a \frac{\vec{\partial}}{\partial q^a}$ と置き

$$\iota_{X_f} \omega = \left((-1)^{|X|+p} X_a \frac{\vec{\partial}}{\partial p_a} + (-1)^{|X|+q} Y^a \frac{\vec{\partial}}{\partial q^a} \right) \cdot ((-1)^{n|q|} dq^a \wedge dp_a) \quad (\text{B.318})$$

$$= -dq^a \frac{\vec{\partial} f}{\partial q^a} - dp_a \frac{\vec{\partial} f}{\partial p_a} \quad (\text{B.319})$$

この方程式を解き X_a, Y^a を求めると,

$$X_f = \frac{f \overleftarrow{\partial}}{\partial q^a} \frac{\vec{\partial}}{\partial p_a} - (-1)^{|q||p|} \frac{f \overleftarrow{\partial}}{\partial p_a} \frac{\vec{\partial}}{\partial q^a} \quad (\text{B.320})$$

を得る．ここで $\frac{f \overleftarrow{\partial}}{\partial q^a} = (-1)^{(|f|-q)a} \frac{\vec{\partial} f}{\partial q^a}$ は次数付き右微分である．ここで次数付き右微分と左微分の変換則に符号因子が付いているのは, 微分演算子が f を飛び越える時に符号が出る為である．

次数付き Poisson 括弧は以下で定義する．

$$\{f, g\} = X_f g = (-1)^{|f|+n} \iota_{X_f} dg = (-1)^{|f|+n+1} \iota_{X_f} \iota_{X_g} \omega. \quad (\text{B.321})$$

この Poisson 括弧は以下の関係式を満たす.

$$\{f, g\} = -(-1)^{(|f|-n)(|g|-n)}\{g, f\}, \quad (\text{B.322})$$

$$\{f, gh\} = \{f, g\}h + (-1)^{(|f|-n)|g|}g\{f, h\}, \quad (\text{B.323})$$

$$\{f, \{g, h\}\} = \{\{f, g\}, h\} + (-1)^{(|f|-n)(|g|-n)}\{g, \{f, h\}\}. \quad (\text{B.324})$$

特に Darboux 座標に対しては, 次の関係を得る.

$$\{q^a, p_b\} = \delta_b^a, \quad \{p_b, q^a\} = -(-1)^{|q||p|}\delta_b^a \quad (\text{B.325})$$

関数 $f = f(q, p)$, $g = g(q, p)$ に対する次数付き Poisson 括弧は (B.320), (B.321) 式より以下で与えられる.

$$\{f, g\} = \frac{f \overleftarrow{\partial}}{\partial q^a} \frac{\overrightarrow{\partial} g}{\partial p_a} - (-1)^{|q||p|} \frac{f \overleftarrow{\partial}}{\partial p_a} \frac{\overrightarrow{\partial} g}{\partial q^a}. \quad (\text{B.326})$$

$L_X \omega = 0$ すなわち $d\iota_X \omega = 0$ の場合, X をシンプレクティックベクトル場と呼ぶ. X, Y がシンプレクティックベクトル場のとき, $[X, Y]$ は関数 $-(-1)^{|X|}\iota_X \iota_Y \omega$ に対するハミルトニアンベクトル場である.

証明

$$\iota_{[X, Y]} \omega = (L_X \iota_Y - (-1)^{|X|(|Y|-1)} \iota_Y L_X) \omega = (-1)^{|X|} d\iota_X \iota_Y \omega \quad (\text{B.327})$$

$$= -d[-(-1)^{|X|}\iota_X \iota_Y \omega] \quad (\text{B.328})$$

$X = X_f, Y = X_g$ がハミルトニアンベクトル場ならば, $|X_f| = |f| + n$ であるから (B.327) 式は

$$\iota_{[X_f, X_g]} \omega = (-1)^{|f|+n} d\iota_{X_f} \iota_{X_g} \omega \quad (\text{B.329})$$

となる. 従って次の関係を得る.

$$X_{\{f, g\}} = -[X_f, X_g] \quad (\text{B.330})$$

さらに

$$\iota_{X_f} \iota_{X_g} \omega = -(-1)^{|f|n+|g|(n+1)} \omega(X_g, X_f) \quad (\text{B.331})$$

であるから,

$$\{f, g\} = (-1)^{|f|+n+1} \iota_{X_f} \iota_{X_g} \omega \quad (\text{B.332})$$

$$= (-1)^{(|f|+|g|)(n+1)} \omega(X_g, X_f) \quad (\text{B.333})$$

$$= (-1)^{|f||g|+n+1} \omega(X_f, X_g). \quad (\text{B.334})$$

我々は写像空間 $\text{Map}(\mathcal{X}, \mathcal{M})$ 上で AKSZ 構成法を考える． D を \mathcal{X} 上の微分とすると局所座標により

$$D = \theta^\mu \frac{\partial}{\partial \sigma^\mu} \quad (\text{B.335})$$

と書ける． D によって誘導される $\text{Map}(\mathcal{X}, \mathcal{M})$ 上の次数 1 のベクトル場を \hat{D} と書くことにすれば，任意の関数 $f \in C^\infty(\mathcal{M})$ に対して

$$\{\iota_{\hat{D}} \mu_* \text{ev}^* \vartheta, \mu_* \text{ev}^* f\} = -\iota_{\hat{D}} \mu_* \text{ev}^* df \left(= \int d^{n+1} \sigma d^{n+1} \theta \mathbf{d}f(\sigma, \theta) \right) \quad (\text{B.336})$$

の関係が成り立つ．

証明 $S_0 = \iota_{\hat{D}} \mu_* \text{ev}^* \vartheta$ はベクトル場 \hat{D} に対するハミルトニアンである．すなわち $X_{S_0} = \hat{D}$ である．従って，次の式を得る．

$$\{\iota_{\hat{D}} \mu_* \text{ev}^* \vartheta, \mu_* \text{ev}^* f\} = \{S_0, \mu_* \text{ev}^* f\} \quad (\text{B.337})$$

$$= (-1)^{|S_0|} \iota_{\hat{D}} \iota_{X_{\mu_* \text{ev}^* f}} \omega \quad (\text{B.338})$$

$$= -\iota_{\hat{D}} \mu_* \text{ev}^* df. \quad (\text{B.339})$$

C 写像空間 $\text{Map}(\mathcal{X}, \mathcal{M})$ 上の演算規則

写像空間 $\text{Map}(\mathcal{X}, \mathcal{M})$ 上での計算則についてまとめる． X を $d = n + 1$ 次元多様体とする．写像空間 $\text{Map}(\mathcal{X}, \mathcal{M})$ の関数は超場 (superfield) である．超場は $\mathcal{X} = T[1]X$ 上の変数に依存する． $\mathcal{X} = T[1]X$ は (d, d) 次元超多様体であり，次数が 0 の局所座標 σ^μ と次数が 1 の局所座標 θ^μ によって座標が入っている．ただし $\mu = 1, \dots, d$ である．

超場 $\Phi(\sigma, \theta)$ のグラスマン座標変数 θ^μ に対する成分展開を

$$\Phi(\sigma, \theta) = \sum_{j=0}^d \frac{1}{j!} \phi_{\mu_1 \dots \mu_j}(\sigma) \theta^{\mu_1} \dots \theta^{\mu_j} \quad (\text{C.340})$$

と定義する．ここで次数 1 の座標変数 θ^μ が $\phi_{\mu_1 \dots \mu_j}$ の右側にあることに注意する．また， $j = 0$ の項は $\frac{1}{0!} \phi(\sigma)$ となり， θ^μ を伴わない事に注意する． $|\theta^\mu| = 1$ であるから $|\phi_{\mu_1 \dots \mu_j}| = |\Phi| - j$ であることが分かる．

写像空間 $\text{Map}(\mathcal{X}, \mathcal{M})$ 上の汎関数微分は

$$\frac{\overrightarrow{\delta} \Phi(\sigma, \theta)}{\delta \Phi(\sigma', \theta')} = \delta^d(\sigma' - \sigma) \delta^d(\theta' - \theta) \quad (\text{C.341})$$

と定義する．ここでグラスマン変数に対するデルタ関数 $\delta^d(\theta' - \theta)$ が現れているが，このデルタ関数は $\delta^d(\theta' - \theta) = (-1)^d \delta^d(\theta - \theta')$ であり $|\delta^d(\theta' - \theta)| = d$ であることに注意する．(C.341) 式を成分展開することで，左汎関数微分を成分で書くことが出来る．

$$\frac{\vec{\delta}}{\delta\Phi(\sigma, \theta)} = \sum_{j=0}^d \frac{(-1)^{d-j}}{j!(d-j)!} \theta^{\mu_1} \dots \theta^{\mu_j} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_j \mu_{j+1} \dots \mu_d} \frac{\vec{\delta}}{\delta\phi_{\mu_{j+1} \dots \mu_d}(\sigma)} \quad (\text{C.342})$$

ただし， $\epsilon_{\mu_1 \dots \mu_j \mu_{j+1} \dots \mu_d}$ は d 次元の完全反対称テンソルである．(C.341) 式から $|\frac{\vec{\delta}}{\delta\Phi(\sigma, \theta)}| = -|\Phi| + d$ が分かる為，(C.342) 式に対して次数勘定をすれば $|\frac{\vec{\delta}}{\delta\phi_{\mu_{j+1} \dots \mu_d}(\sigma)}| = -|\Phi| + d - j$ が得られる．

任意の超場 F に対して次の関係式を要請することで右汎関数微分を定義する．

$$\frac{\vec{\delta} F}{\delta\Phi} = (-1)^{|F|(|\Phi| - d)} \frac{F \overleftarrow{\delta}}{\delta\Phi} \quad (\text{C.343})$$

この要請は $|\frac{\vec{\delta}}{\delta\Phi(\sigma, \theta)}| = |\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\Phi(\sigma, \theta)}| = -(|\Phi| - d)$ であることから自然な要請である．

(C.343) 式より定まる右汎関数微分を成分展開すれば，

$$\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\Phi(\sigma, \theta)} = \sum_{j=0}^d \frac{1}{j!(d-j)!} (-1)^{|\Phi| + j(|\Phi| + d + 1)} \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\phi_{\mu_{j+1} \dots \mu_d}(\sigma)} \theta^{\mu_1} \dots \theta^{\mu_j} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_j \mu_{j+1} \dots \mu_d} \quad (\text{C.344})$$

を得る．これらから，左/右汎関数微分とデルタ関数の関係について次のことが分かる．

$$\frac{\vec{\delta} \Phi(\sigma, \theta)}{\delta\Phi(\sigma', \theta')} = \delta^d(\sigma' - \sigma) \delta^d(\theta' - \theta), \quad (\text{C.345})$$

$$\frac{\Phi(\sigma, \theta) \overleftarrow{\delta}}{\delta\Phi(\sigma', \theta')} = (-1)^{|\Phi|(1+d)+d} \delta^d(\sigma - \sigma') \delta^d(\theta - \theta') \quad (\text{C.346})$$

特に右汎関数微分の際は符号が現れるので注意されたい．汎関数微分の次数に対しては

$$\left| \frac{\vec{\delta}}{\delta\Phi(\sigma, \theta)} \right| = \left| \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\Phi(\sigma, \theta)} \right| = -|\Phi| + d \quad (\text{C.347})$$

が分かる．任意の汎関数 F を伴う場合は単に

$$\left| \frac{\vec{\delta} F}{\delta\Phi(\sigma, \theta)} \right| = \left| \frac{F \overleftarrow{\delta}}{\delta\Phi(\sigma, \theta)} \right| = |F| + d - |\Phi| \quad (\text{C.348})$$

となる．左/右汎関数微分に対するライプニッツ則は成分展開の式を用いて確かめれば次のようになる．

$$\frac{\vec{\delta}}{\delta\Phi}(FG) = \frac{\vec{\delta} F}{\delta\Phi} \cdot G + (-1)^{|F|(d-|\Phi|)} F \cdot \frac{\vec{\delta} G}{\delta\Phi}, \quad (\text{C.349})$$

$$(FG) \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\Phi} = F \cdot \frac{G \overleftarrow{\delta}}{\delta\Phi} + (-1)^{|G|(d-|\Phi|)} \frac{F \overleftarrow{\delta}}{\delta\Phi} \cdot G. \quad (\text{C.350})$$

これは汎関数微分の次数 (C.347) 式を考慮すれば、通常のライプニッツ則の自然な拡張になっている。

超多様体の世界体積に対する積分測度は $\mu = d\sigma^1 \cdots d\sigma^d d\theta^d \cdots d\theta^1$ と定義し、その次数は $|\mu| = -d$ である。この次数は、グラスマン変数に対する積分 $d\theta^\mu$ は被積分関数中の θ^μ を1つ減らし次数を1つ減らす作用をするため自然なものである。グラスマンデルタ関数の積分中での振る舞いは

$$\int \mu_\theta \delta^d(\theta - \theta') \Phi(\sigma, \theta) = \Phi(\sigma, \theta') \quad (\text{C.351})$$

となる。ただし $\mu_\theta = d\theta^d \cdots d\theta^1$ とした。特に多様体 X が奇数次元 d の場合は、積分の際にグラスマンデルタ関数が (C.351) 式の位置にあるかどうか注意する必要がある。

本節で示した写像空間 $\text{Map}(\mathcal{X}, \mathcal{M})$ 上での汎関数微分及びその成分表示は、AKSZ 形式で物理的な成分場を取り扱う場合には不可欠であるにもかかわらず、これまで具体的に与えられていなかった。今回特に奇数次元 d での具体的な表式を定めたことは新しく、AKSZ 形式で場の理論を議論する場合に重要である。

D Lie 3-algebroid の構造定数に対する条件

次数の同じ座標をまとめて以下で表す：

$$\eta^A = (\omega^i, q^i, p_i) \quad Z_A = (-\xi_i, u_i, v^i) \quad (\text{D.352})$$

$$(1, 1, 1) \quad (2, 2, 2) \quad (\text{D.353})$$

次数： $|\eta^A| = 1, |Z_A| = 2$.

次数3のホモロジカル関数：

$$\Theta = f_{1A}^i \xi_i \eta^A + \frac{1}{2} f_2^{AB} Z_A Z_B + \frac{1}{2} f_3^A{}_{BC} Z_A \eta^B \eta^C + \frac{1}{4!} f_{4ABCD} \eta^A \eta^B \eta^C \eta^D. \quad (\text{D.354})$$

Darboux 座標に対する Poisson 括弧：

$$\{x^i, \zeta_j\} = \{\omega^i, -\xi_j\} = \{q^i, u_j\} = \{p_j, v^i\} = \delta^i_j \quad (\text{D.355})$$

$$\{\eta^A, Z_B\} = \delta^A_B. \quad (\text{D.356})$$

Θ によって定まるホモロジカルベクトル場：

$$Q = \{\Theta, -\} \quad (D.357)$$

$$= \frac{\Theta \overleftarrow{\partial}}{\partial x^i} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial \zeta_i} - \frac{\Theta \overleftarrow{\partial}}{\partial \zeta_i} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial x^i} + \frac{\Theta \overleftarrow{\partial}}{\partial \eta^A} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial Z_A} - \frac{\Theta \overleftarrow{\partial}}{\partial Z_A} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial \eta^A}. \quad (D.358)$$

古典マスター方程式：

$$\{\Theta, \Theta\} = Q\Theta \quad (D.359)$$

$$= \frac{\Theta \overleftarrow{\partial}}{\partial x^i} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial \zeta_i} \Theta - \frac{\Theta \overleftarrow{\partial}}{\partial \zeta_i} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial x^i} \Theta + \frac{\Theta \overleftarrow{\partial}}{\partial \eta^A} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial Z_A} \Theta - \frac{\Theta \overleftarrow{\partial}}{\partial Z_A} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial \eta^A} \Theta \quad (D.360)$$

$$= 2 \left(\frac{\Theta \overleftarrow{\partial}}{\partial x^i} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial \zeta_i} \Theta + \frac{\Theta \overleftarrow{\partial}}{\partial \eta^A} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial Z_A} \Theta \right). \quad (D.361)$$

ただし、右微分と左微分の入れ替え則に注意されたい： $\frac{F \overleftarrow{\partial}}{\partial q^a} = (-1)^{(|F|-|q^a|)|q^a|} \frac{\overrightarrow{\partial} F}{\partial q^a}$.

古典マスター方程式の各項：

$$\frac{\Theta \overleftarrow{\partial}}{\partial x^i} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial \zeta_i} \Theta = \left((\partial_i f_{1A}^j) \zeta_j \eta^A + \frac{1}{2} (\partial_i f_2^{AB}) Z_A Z_B + \frac{1}{2} (\partial_i f_3^A{}_{BC}) Z_A \eta^B \eta^C + \frac{1}{4!} (\partial_i f_{4ABCD}) \eta^A \eta^B \eta^C \eta^D \right) \times f_{1E}^i \eta^E, \quad (D.362)$$

$$\frac{\Theta \overleftarrow{\partial}}{\partial \eta^A} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial Z_A} \Theta = \left(f_{1D}^i \zeta_i + f_3^A{}_{BD} Z_A \eta^B + \frac{1}{3!} f_{4ABCD} \eta^A \eta^B \eta^C \right) \left(f_2^{DE} Z_E + \frac{1}{2} f_3^D{}_{EF} \eta^E \eta^F \right). \quad (D.363)$$

Darboux 座標によってそれぞれの項をまとめる：

$$\{\Theta, \Theta\} = [\zeta Z] + [\zeta \eta^2] + [Z^2 \eta] + [Z \eta^3] + [\eta^5], \quad (D.364)$$

ただし各項は以下である：

$$[\zeta Z] = 2f_{1D}^i f_2^{DE} \zeta_i Z_E, \quad (D.365)$$

$$= (2(\partial_i f_{1B}^j) f_{1C}^i + f_{1A}^j f_3^A{}_{BC}) \zeta_j \eta^B \eta^C, \quad (D.366)$$

$$= ((\partial_i f_2^{AC}) f_{1D}^i - 2f_2^{AB} f_3^C{}_{BD}) Z_A Z_C \eta^D, \quad (D.367)$$

$$= \left(f_{1B}^i (\partial_i f_3^A{}_{DE}) + f_3^A{}_{BC} f_3^C{}_{DE} - \frac{2}{3!} f_2^{AC} f_{4CBDE} \right) Z_A \eta^B \eta^D \eta^E, \quad (D.368)$$

$$= \left(\frac{1}{2 \cdot 3!} f_{1A}^i (\partial_i f_{4BCDE}) - \frac{1}{3!} f_3^F{}_{AB} f_{4FCDE} \right) \eta^A \eta^B \eta^C \eta^D \eta^E. \quad (D.369)$$

古典マスター方程式は恒等式なので、Lie 3- algebroid の構造定数に対して以下の条件が得られる：

$$f_{1A}^i f_2^{AB} = 0, \quad (\text{D.370})$$

$$(\partial_i f_{1[B}^j) f_{1C]}^i + f_{1A}^j f_3^A{}_{BC} = 0, \quad (\text{D.371})$$

$$f_{1D}^i (\partial_i f_2^{AC}) - f_2^{(A|B|} f_3^{C)}{}_{BD} = 0, \quad (\text{D.372})$$

$$f_{1[B}^i (\partial_i f_3^A{}_{DE])} - f_3^A{}_{C[B} f_3^C{}_{DE]} - 2f_2^{AC} f_{4CBDE} = 0, \quad (\text{D.373})$$

$$f_{1[A}^i (\partial_i f_{4BCDE])} - 2f_3^F{}_{[AB} f_{4|F|CDE]} = 0. \quad (\text{D.374})$$

ここでそれぞれの構造定数 f_\bullet は定義から部分的/全体的に反対称/対称テンソルである．また、添え字に対する $[\]$ 括弧と $(\)$ 括弧はそれぞれ反対称和と対称和を意味する．ただし、係数 $\frac{1}{n!}$ の付かない定義を採用している．

例： $f_3^A{}_{[BC]} = f_3^A{}_{BC} - f_3^A{}_{CB} = 2f_3^A{}_{BC}$, $f_2^{(AB)} = f_2^{AB} + f_2^{BA} = 2f_2^{AB}$.

参考文献

- [1] Taiki Bessho, Marc A. Heller, Noriaki Ikeda, and Satoshi Watamura. Topological Membranes, Current Algebras and H-flux - R-flux Duality based on Courant Algebroids. *JHEP*, 04:170, 2016.
- [2] Tamiaki Yoneya. Interacting Fermionic and Pomeronic Strings: Gravitational Interaction of the Ramond Fermion. *Nuovo Cim. A*, 27:440, 1975.
- [3] Joseph Polchinski. *String Theory*, volume 1 of *Cambridge Monographs on Mathematical Physics*. Cambridge University Press, 1998.
- [4] K.S. Narain, M.H. Sarmadi, and Edward Witten. A Note on Toroidal Compactification of Heterotic String Theory. *Nucl. Phys. B*, 279:369–379, 1987.
- [5] Jeremy Michelson. Compactifications of type IIB strings to four-dimensions with non-trivial classical potential. *Nucl. Phys. B*, 495:127–148, 1997.
- [6] J. Scherk and John H. Schwarz. Spontaneous breaking of supersymmetry through dimensional reduction. *Physics Letters B*, 82(1):60 – 64, 1979.

- [7] Jessie Shelton, Washington Taylor, and Brian Wecht. Nongeometric flux compactifications. *JHEP*, 10:085, 2005.
- [8] C M Hull. Doubled Geometry and T-Folds. *JHEP*, 07:080, 2007.
- [9] C.M. Hull and R.A. Reid-Edwards. Non-geometric backgrounds, doubled geometry and generalised T-duality. *JHEP*, 09:014, 2009.
- [10] Nigel Hitchin. Generalized Calabi-Yau manifolds. *arXiv Mathematics e-prints*, page math/0209099, September 2002.
- [11] Marco Gualtieri. Generalized complex geometry. *arXiv Mathematics e-prints*, page math/0401221, January 2004.
- [12] Gil R. Cavalcanti and Marco Gualtieri. Generalized complex geometry and T-duality. In *A Celebration of the Mathematical Legacy of Raoul Bott (CRM Proceedings & Lecture Notes) American Mathematical Society (2010) 341-366. ISBN: 0821847775*, page 0821847775, 2011.
- [13] Albert S. Schwarz. Geometry of Batalin-Vilkovisky quantization. *Commun. Math. Phys.*, 155:249–260, 1993.
- [14] Albert S. Schwarz. Semiclassical approximation in Batalin-Vilkovisky formalism. *Commun. Math. Phys.*, 158:373–396, 1993.
- [15] N. Hitchin. Generalized calabi-yau manifolds. *The Quarterly Journal of Mathematics*, 54(3):281–308, Sep 2003.
- [16] Marco Gualtieri. Generalized complex geometry. *Annals of Mathematics*, 174(1):75–123, Jul 2011.
- [17] Zhang-Ju Liu, Alan Weinstein, and Ping Xu. Manin Triples for Lie Bialgebroids. *J. Diff. Geom.*, 45(3):547–574, 1997.
- [18] Yvette Kosmann-Schwarzbach. Quasi, twisted, and all that... in poisson geometry and lie algebroid theory. *The Breadth of Symplectic and Poisson Geometry*, page 363–389.

- [19] Pavol Ševera. Poisson–Lie T-Duality and Courant Algebroids. *Lett. Math. Phys.*, 105(12):1689–1701, 2015.
- [20] L. Caston and R. Fiorese. Mathematical Foundations of Supersymmetry. *arXiv e-prints*, page arXiv:0710.5742, October 2007.
- [21] V. S. Varadarajan. *Super geometry*, pages 93–120. Springer New York, New York, NY, 2011.
- [22] Dmitry Roytenberg. Courant algebroids, derived brackets and even symplectic supermanifolds, 1999.
- [23] Tsuguhiko Asakawa, Hisayoshi Muraki, Shuhei Sasa, and Satoshi Watamura. Poisson-generalized geometry and R -flux. *Int. J. Mod. Phys.*, A30(17):1550097, 2015.
- [24] Rui Loja Fernandes. Connections in poisson geometry. i. holonomy and invariants. *Journal of Differential Geometry*, 54(2):303–365, 2000.
- [25] Izu Vaisman. Reduction and submanifolds of generalized complex manifolds. *Differential Geometry and Its Applications*, 25:147–166, 2005.
- [26] Dmitry Roytenberg. Quasi-lie bialgebroids and twisted poisson manifolds. *Letters in Mathematical Physics*, 61:123–137, 2002.
- [27] Dmitry Roytenberg. On the structure of graded symplectic supermanifolds and Courant algebroids. In *Workshop on Quantization, Deformations, and New Homological and Categorical Methods in Mathematical Physics Manchester, England, July 7-13, 2001*, 2002.
- [28] Andreas Deser and Jim Stasheff. Even symplectic supermanifolds and double field theory. *Commun. Math. Phys.*, 339(3):1003–1020, 2015.
- [29] Ursula Carow-Watamura, Noriaki Ikeda, Tomokazu Kaneko, and Satoshi Watamura. DFT in supermanifold formulation and group manifold as background geometry. *JHEP*, 04:002, 2019.
- [30] Zhang-Ju Liu, Alan Weinstein, and Ping Xu. Manin Triples for Lie Bialgebroids. *eprint arXiv:dg-ga/9508013*, pages dg-ga/9508013, August 1995.

- [31] Yvette Kosmann-Schwarzbach. Quasi, twisted, and all that... in poisson geometry and lie algebroid theory. *The Breadth of Symplectic and Poisson Geometry*, page 363–389.
- [32] Jae-Suk Park. Topological open p-branes. In *Symplectic geometry and mirror symmetry. Proceedings, 4th KIAS Annual International Conference, Seoul, South Korea, August 14-18, 2000*, pages 311–384, 2000.
- [33] Noriaki Ikeda. Deformation of BF theories, topological open membrane and a generalization of the star deformation. *JHEP*, 07:037, 2001.
- [34] M. Alexandrov, A. Schwarz, O. Zaboronsky, and M. Kontsevich. The Geometry of the master equation and topological quantum field theory. *Int. J. Mod. Phys.*, A12:1405–1429, 1997.
- [35] Alberto S. Cattaneo and Giovanni Felder. On the AKSZ formulation of the Poisson sigma model. *Lett. Math. Phys.*, 56:163–179, 2001.
- [36] Dmitry Roytenberg. AKSZ-BV Formalism and Courant Algebroid-induced Topological Field Theories. *Lett. Math. Phys.*, 79:143–159, 2007.
- [37] I. A. Batalin and G. A. Vilkovisky. Gauge algebra and quantization. *Physics Letters B*, 102(1):27–31, June 1981.
- [38] Glenn Barnich, Friedemann Brandt, and Marc Henneaux. General solution of the Wess-Zumino consistency condition for Einstein gravity. *Phys. Rev. D*, 51:1435–1439, 1995.
- [39] I. A. Batalin and G. A. Vilkovisky. Quantization of gauge theories with linearly dependent generators. *Phys. Rev. D*, 28:2567–2582, Nov 1983.
- [40] Noriaki Ikeda and K. I. Izawa. General form of dilaton gravity and nonlinear gauge theory. *Prog. Theor. Phys.*, 90:237–246, 1993.
- [41] Noriaki Ikeda. Two-dimensional gravity and nonlinear gauge theory. *Annals Phys.*, 235:435–464, 1994.
- [42] Peter Schaller and Thomas Strobl. Poisson structure induced (topological) field theories. *Mod. Phys. Lett.*, A9:3129–3136, 1994.

- [43] Ctirad Klimcik and Thomas Strobl. WZW - Poisson manifolds. *J. Geom. Phys.*, 43:341–344, 2002.
- [44] Anton Alekseev and Thomas Strobl. Current algebras and differential geometry. *JHEP*, 03:035, 2005.
- [45] Giulio Bonelli and Maxim Zabzine. From current algebras for p-branes to topological M-theory. *JHEP*, 09:015, 2005.
- [46] Noriaki Ikeda and Kozo Koizumi. Current Algebras and QP Manifolds. *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.*, 10:1350024, 2013.
- [47] Noriaki Ikeda and Xiaomeng Xu. Current Algebras from DG Symplectic Pairs in Super-geometry. 2013.
- [48] J Grabowski and P Urbanski. Tangent lifts of poisson and related structures. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 28(23):6743–6777, Dec 1995.
- [49] Yukio Kaneko, Hisayoshi Muraki, and Satoshi Watamura. Contravariant Gravity on Poisson Manifolds and Einstein Gravity. *Class. Quant. Grav.*, 34(11):115002, 2017.
- [50] Izu Vaisman. On the geometry of double field theory. *J. Math. Phys.*, 53:033509, 2012.